

И. Д. ПЕХЛЕЦКИЙ

МАТЕМАТИКА

Учебник

*Рекомендовано
Федеральным государственным автономным учреждением
«Федеральный институт развития образования» (ФГАУ «ФИРО»)
в качестве учебника для использования в учебном процессе
образовательных учреждений, реализующих программы
по профессиям и специальностям среднего
профессионального образования*

11-е издание, переработанное и дополненное



Москва
Издательский центр «Академия»
2014



УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
ПЗ1

Рецензенты:

зам. директора по учебной работе, преподаватель математики ГБОУ СПО
г. Москвы «Московский государственный техникум технологии,
экономики и права им. Л. Б. Красина» *Т. Н. Синилова*;
преподаватели математики Московского станкоинструментального техникума
В. И. Семенова, М. В. Косолапова

Пехлецкий И. Д.

ПЗ1 Математика : учебник для студ. учреждений сред. проф. об-
разования / И. Д. Пехлецкий. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. :
Издательский центр «Академия», 2014. — 320 с.

ISBN 978-5-4468-0215-9

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образова-
тельным стандартом для использования в учебном процессе образовательных
учреждений, реализующих программы среднего профессионального образо-
вания по всем профессиям и специальностям, учебная дисциплина «Матема-
тика».

Изложены идеи современной математики, необходимые для соответству-
ющего профессионального обучения, в доступном для понимания виде и воз-
можностью их прикладного использования. Повышенное внимание уделено
смыслу и логике математических построений; формальные математические
преобразования занимают минимальное место. Задания для практических за-
ний сопровождаются примерами их выполнения.

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение
любым способом без согласия правообладателя запрещается*

© Пехлецкий И. Д., 2014

© Образовательно-издательский центр «Академия», 2014

ISBN 978-5-4468-0215-9 © Оформление. Издательский центр «Академия», 2014

Данный учебник является частью учебно-методического комплекта для всех специальностей среднего профессионального образования.

Учебник предназначен для изучения дисциплины «Математика», входящей в естественно-научный цикл.

Учебно-методические комплекты нового поколения включают традиционные и инновационные учебные материалы, позволяющие обеспечить изучение общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей. Каждый комплект содержит в себе учебники и учебные пособия, средства обучения и контроля, необходимые для освоения общих и профессиональных компетенций, в том числе и с учетом требований работодателя.

Учебные издания дополняются электронными образовательными ресурсами. Электронные ресурсы содержат теоретические и практические модули с интерактивными упражнениями и тренажерами, мультимедийные объекты, ссылки на дополнительные материалы и ресурсы в Интернете. В них включены терминологический словарь и электронный журнал, в котором фиксируются основные параметры учебного процесса: время работы, результат выполнения контрольных и практических заданий. Электронные ресурсы легко встраиваются в учебный процесс и могут быть адаптированы к различным учебным программам.

Положение, которое складывается с изучением математики в учреждениях среднего профессионального образования, с каждым годом становится более сложным. Впрочем, это относится и к общеобразовательной средней, и высшей школам.

С одной стороны, нельзя допустить снижения объема математических знаний обучающихся: это неизбежно приведет к существенным потерям в качестве подготовки специалистов, поскольку именно математика создает главный фундамент для всех наук технического профиля, а в их высших разделах практически полностью берет на себя функции аппарата прикладного моделирования и исследования. Да и науки гуманитарного профиля, еще недавно благополучно обходившиеся без математики, сегодня возлагают на нее большие надежды. При этом важно заметить, что математику необходимо изучать как можно глубже в молодом возрасте. Тогда она усваивается сравнительно легко. Жизнь показывает, что пробелы в школьном образовании редко и с большим трудом удастся восполнить в зрелом возрасте.

Но, с другой стороны, математике, как и многим другим учебным дисциплинам, приходится «потесниться» в учебных планах: появляются новые важные учебные предметы, возрастает объем необходимой специалисту информации по профилю обучения. Достаточно упомянуть информатику и вычислительную технику, ранее вообще не представленные в учебных планах, а ныне требующие значительного объема учебного времени.

Стремясь сделать изучение математики более легким, преподаватели и ученые-методисты детализируют математические рассуждения, насыщают учебники и учебные пособия многочисленными примерами, разъясняющими все тонкости построений и вычислений. Это естественный и, в общем, правильный путь. Но движение по нему прогрессивно лишь до определенных пределов — как и бывает с любой, даже самой удачной, педагогической идеей.

И вот в учебной литературе по математике для средних учебных заведений к настоящему моменту назрел своеобразный кризис: дей-

ствующие учебные программы по математике могут быть «покрыты» существующими, часто весьма добротными учебниками, учебными пособиями и задачками, но объем содержащегося в них материала превышает элементарные физические возможности обучающихся. При этом, заметим, что речь идет вовсе не об «излишних» математических знаниях. Ситуация, скорее, противоположная: ряд важных современных вопросов математики иногда излагается недостаточно корректно (без экономии учебного времени) или не представлен вовсе.

Но самая главная проблема, остро обозначившаяся в последние годы, состоит в том, что у студентов не возникает полноценной системы математических представлений. Знание многих формул и алгоритмов недолго сохраняется в памяти, если к ним не обращаться достаточно часто. Представления о математических структурах более высокого уровня имеют больше шансов стать опорой для восполнения при необходимости забытых деталей. Такие структуры и выступают в роли математического фундамента в многочисленных приложениях. Однако эти представления необходимо целенаправленно и настойчиво формировать в процессе изучения математики, что возможно только при специально организованном выделении их на фоне деталей.

Данный учебник ставит своей задачей частично восполнить указанный выше пробел в учебной литературе по математике для учреждений среднего профессионального образования. Укажем в этой связи на ряд наиболее существенных его особенностей методического и содержательного характера.

1. Учебник предназначен для использования в учреждениях среднего профессионального образования, в учебных планах которых предусмотрена дисциплина «Математика», и соответствует действующим программам. Несмотря на то что объем учебного времени на изучение курса «Математика» существенно варьируется (от 137 до 250 ч), представленные в учебнике основные математические структуры имеют настолько большую общеобразовательную и математическую значимость, что являются обязательными для рассмотрения студентами всех специальностей. Другой вопрос — до какой детализации должно быть доведено их изучение, будет ли поставлена цель проведения всех доказательств, насколько прочны должны быть сформированные навыки математических преобразований и т. п. Соответствующие вопросы естественным образом регулируются преподавателем в ходе учебного процесса: «Вы можете опустить эти доказательства, но обязательно запомните формулы...»; «Вот самые простые задачи, связанные с использованием данных формул; по-

смотрите, как они решаются, а затем решите аналогичные...»; «Вы должны самостоятельно решить задачи...; они несколько сложнее тех, что мы только что решали; подумайте, догадайтесь...»; «Этот пункт мы пропустим...»; «Этот подраздел рассмотрите самостоятельно...» и т. п.

Данный учебник содержит подразделы, изучение которых рассчитано на программы, предусматривающие повышенный объем учебного времени. Такие подразделы отмечены знаком *. В зависимости от задач изучения математики в связи с конкретной специальностью преподаватель может по своему усмотрению расширять или сужать зоны действия подобных знаков, информируя об этом студентов.

Поскольку подобное регулирование является существенным фактором обучения, данный учебник ориентирован главным образом на работу студентов под руководством преподавателя, а не на самообразование. Последний вариант использования учебника тоже не исключается, но лишь в роли некоторого компонента, например для систематизации знаний, полученных на основе работы по другим учебным пособиям, или, наоборот, в целях создания предварительной общей ориентации в соответствующих разделах математики.

2. Если сравнивать содержание материала, представленного в данном учебнике, с обозначенным в программах, а также приведенным во многих других учебных пособиях, то важно заметить, что цели сокращения объема текста пособия нигде не достигались экономией на содержании материала и доказательствах. Однако все доказательства представлены очень компактно. Избран своеобразный стиль изложения, позволяющий избегать громоздких математических преобразований, массовых ссылок на ранее доказанные формулы, затрудняющих чтение текста, и даже принятых в математической литературе традиционных схем оформления (выделения слов «доказательство», «что и требовалось доказать» и т. п.). При этом из контекста всегда легко усматривается, доказаны ли соответствующие утверждения или речь идет лишь об описании каких-то важных идей, знакомство с которыми необходимо пользователю математики, заинтересованному лишь в практическом применении ее достижений. Естественно, что в зависимости от профиля будущей специальности может не выдвигаться цель знания всех деталей математических построений студентами, располагающими незначительным учебным временем: они могут не продумывать всех тонкостей кратко обозначенных рассуждений, но, уловив их логику и главную идею, сосредоточить внимание на сущности изучаемых математических структур, которые постоянно выдвигаются на первый план в тексте учебника.

Содержание материала с избытком покрывает требования программы, а все его «расширения» органически связаны с этими требованиями. Такой «запас» представляется совершенно необходимым, поскольку «отступление» в направлении сокращения программ, упрощения в изложении материала, приводящего к серьезной научной некорректности и необходимости переучивания на более высоких ступенях образования, было бы глубокой стратегической ошибкой в рамках среднего профессионального образования.

3. Как известно, в содержании курса математики в учреждениях среднего профессионального образования можно условно выделить две части: материал, который изучается после окончания основной школы в полной средней школе, и материал, который традиционно (хотя, по современным представлениям, некорректно) относится к высшей математике. В ряде учебных пособий эта раздельная структура изложения сохранена. Это явно неэкономный вариант. Учреждения среднего профессионального образования уникальны в том смысле, что имеют возможность осуществить логико-математический синтез при рассмотрении этих частей. Один из возможных вариантов такого синтеза представлен в данном учебнике.

Укажем лишь некоторые фрагменты реализации данной идеи:

- теория элементарных функций является очень сложным разделом школьной математики, изложить который корректно не удастся, поскольку понятия предела и непрерывности функции детально не рассматриваются. В учебнике анализ этих понятий представлен до рассмотрения элементарных функций. В итоге теория этих функций значительно упрощается и становится более строгой;
- вопросы стереометрии школьного курса математики также могут быть изложены в учреждениях среднего профессионального образования более компактно и корректно, если им предшествует теория векторов и интеграла;
- введение аппарата аналитической геометрии — мощное средство решения геометрических задач, а в соединении с основами линейной алгебры делает анализ многих довольно сложных школьных задач предельно простым. При этом, правда, возникает частный случай рассмотрения ряда геометрических вопросов, это уже не «абсолютная» геометрия взаимоотношения точек, прямых и плоскостей, а геометрия взаимоотношений в дополнительном предположении: в пространстве введена система координат. Однако думается, что такое ограничение общности вполне допустимо в рамках среднего профессионального образования.

4. Содержание большинства учебных пособий по математике для учреждений среднего профессионального образования не претендует на использование современных определений и трактовок основных математических понятий, начиная со столь важного общематематического понятия, как «функция». По-видимому, в целом это правильная позиция: многие фундаментальные математические понятия в современной трактовке становятся очень абстрактными и восприятие их на начальных этапах обучения математике затруднительно. Однако есть существенные исключения: в отдельных случаях современные трактовки понятий оказываются не более сложными для понимания, чем традиционные, но использование их оказывается весьма мощным конструктивным средством упрощения математических построений и выявления основных математических структур, представления о которых столь важно сформировать в ходе учебного процесса.

На первое место выходит аксиоматический метод определения основных математических структур. Он весьма удобен для раскрытия общей логики развития математических идей как «глобального», так и «локального» масштаба. В учебнике он используется (без излишних усложнений, связанных с проверкой требований к аксиоматике) начиная с самых первых математических понятий (множество, отображение и т.д.) и заканчивая определением понятия вероятности случайного события. В итоге классическое понятие вероятности (явно некорректное в качестве основы построения всей теории) и понятие случайной величины оказываются просто частными случаями аксиоматического определения вероятности и могут далее рассматриваться параллельно и в полезном для понимания студентами сопоставлении.

Другое очень важное понятие — функция, введенное в современном понимании, становится универсальным средством определения и разъяснения смысла очень многих понятий: определитель, площадь, вектор, преобразование пространства, производная, интеграл и т.д.

5. В ряде подразделов учебника оказалось целесообразным отойти от привычных методических вариантов изложения учебного материала ради существенной рационализации и экономии объема необходимых построений.

Приведем характерный пример. Исследование функций методами дифференциального исчисления даже в большинстве вузовских учебников проводится по привычной схеме: доказывается теорема Ферма, а затем на ее основе можно исследовать функции на экстремум; доказывается теорема Лагранжа — можно исследовать функцию

на монотонность и т.д. Программами СПО знакомство с формулой Тейлора не предусмотрено. Однако, как хорошо известно, в этой формуле сконцентрированы все возможности исследования функций методами дифференциального исчисления. Главная сложность, связанная с формулой Тейлора, — вывод формы остаточного члена. Однако реальность такова, что в современных условиях даже в вузах предложить студентам этот вывод часто не удастся: форма остаточного члена приводится без доказательства. То же самое можно сделать и в учреждениях среднего профессионального образования, остальное просто и вполне доступно студентам для понимания. Поэтому все методы исследования функций с помощью дифференциального исчисления рассмотрены в данном учебнике компактно и единообразно — на основе формулы Тейлора.

6. Компактность, краткость и обозримость всех математических рассуждений рассматривались при создании данного учебника как важнейший фактор повышения качества обучения. Дело в том, что благодаря перечисленным факторам существенно облегчается возможность запоминания материала, тем более что материал каждого подраздела можно без больших расходов времени перечитывать многократно, а память в студенческом возрасте, как правило, хорошая.

Естественно, что нужно позаботиться о том, чтобы такое запоминание обязательно сопровождалось пониманием. Тогда материал оказывается в постоянном распоряжении студента, его можно, дополнительно продумывая, уточнять, воспроизводить, использовать в упражнениях и т.д. Причем, как показывает опыт, этот процесс во многих компонентах происходит автоматически, если только условия учебного процесса тому способствуют.

7. Задачи и упражнения соотнесены со структурой теоретического курса и помогают усвоить и понять материал. Если не вести речь о задачах, связанных со спецификой изложения курса, то следует заметить, что большая их часть традиционна и уже встречалась в разных задачниках и учебных пособиях. Объем представленных задач и упражнений рассчитан на реализацию в рамках реального учебного времени изучения математики (с некоторым запасом). При необходимости он всегда может быть расширен преподавателем, а главные проблемы, конечно, не в увеличении набора задач, а в отборе наиболее информативных и значимых.

Образцы решения текстовых задач в относительно небольшом количестве представлены только в связи с изложением теории, а в разделе «Ответы и рекомендации к решению задач» приведены краткие советы и пояснения к наиболее сложным задачам.

Курс математики, представленный в этой книге, охватывает важные разделы нескольких учебных дисциплин. Каждому из них посвящены отдельные книги. Если собрать их вместе, то получится небольшая библиотека, изучить которую студенту очень трудно в рамках отведенного учебного времени.

В данной книге тот же материал представлен очень компактно. Это существенно облегчает изучение.

Однако каждому понятно, что экономность изложения достигается только повышением информационной концентрированности текста и глубокой структурной организацией взаимосвязей изучаемых математических понятий. А работа с таким текстом — это не чтение художественной литературы. Успех достигается только благодаря специальной системе работы.

Первое основное правило: учебный материал каждого раздела должен *прочитываться многократно*. Это не займет много времени, но совершенно необходимо, так как, какими бы большими математическими способностями ни обладал человек, после одного-двух прочтений нового материала обычно сложно полноценно усвоить его содержание (если вы являетесь исключением, обязательно займитесь математикой профессионально). При первом прочтении нужно ставить цель — *понять*, а не запомнить. Обычно для достижения хорошего понимания материала одного прочтения мало. К тому же часто приходится, полистав книгу, припомнить кое-что из ранее изученного. Здесь вам поможет предметный указатель, помещенный в конце книги. В итоге первое прочтение оказывается самым длительным.

Совершенно нормально, если вы сможете достигнуть хорошего понимания только при чьей-то квалифицированной помощи. Книга рассчитана на учебную работу под руководством преподавателя математики.

А хорошо *запомнить* главное (основные утверждения, формулы, вид графиков и т. п.) тоже очень важно. Ведь это и есть знания, ради которых изучается курс. Поэтому запоминание должно стать основ-

ным ориентиром во всех последующих видах работы с учебным материалом (дополнительное повторение, использование полученных знаний при решении задач и т.д.). Вот здесь-то компактность текста книги окажется очень кстати.

Заметим, что предлагаемая схема работы с математическим текстом является *наиболее экономной* для студента в смысле затрат его труда, если предусматривать достижение хотя бы удовлетворительного уровня знаний. Если вам не жалко этих затрат — можете поэкспериментировать: важная формула, которую вы поленились запомнить, «затормозит» понимание последующего материала, основательно задержит вас при решении задач, огорчит пониженными оценками и т.п.

Но изучение математики — это еще и *решение задач*. Конечно, задача задаче — рознь. Однако и здесь есть полезный совет: рассматривая задачу, *задавайте себе два замечательных вопроса*. Первый:

Что это такое?

Смысл в том, чтобы *спросить себя*, что означают понятия, о которых идет речь в задаче. И *ответить себе*.

Если же ответить сразу не удастся, то ответ обязательно надо поискать, например, в теоретической части курса. Иначе для вас задача может оказаться неразрешимой.

Второй вопрос:

Как это взаимосвязано?

Именно благодаря взаимосвязи понятий задачу удастся решить. Чаше всего такие взаимосвязи предстают в виде формул, формулировок теорем, а некоторые из них задаются формулировкой задачи.

Использовать эти вопросы надо всерьез, прилагая все усилия к поиску ответа на них. Тогда, как вы в скоре убедитесь, задачи будут решаться легче.

И наконец, последняя общая, но важная мысль. Если глубокое изучение математики покажется вам в каком-то смысле излишней роскошью, без которой вполне можно обойтись при овладении избранной вами профессией, то поверьте: конечно — «можно». Но только одной, очень дорогой ценой — неизбежным снижением уровня вашей будущей профессиональной квалификации и ограничением возможности ее роста. Это факт, проверенный поколениями, а убедиться в этом на собственном опыте в полной мере вы сможете лишь тогда, когда лично для вас поправлять что-либо существенно будет поздно.

МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

1.1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА

Каждая наука формирует свою систему взаимосвязанных понятий. Большая часть из них возникает на основе *определений*, т.е. специальных описаний смысла (содержания) понятия. Естественно, что в таких описаниях могут использоваться только те языковые конструкции и, в частности, понятия, смысл которых можно считать полностью известным, если ограничиваться кругом изучаемых данной наукой вопросов (задач или проблем).

Можно, например, определить треугольник как многоугольник с наименьшим числом сторон. Однако такое определение будет корректным только при условии, что ранее уже были определены понятия «многоугольник», «сторона многоугольника» и, кроме того, известен смысл слов «наименьшее число». Можно было бы дать и другие варианты определения, опирающиеся на другие математические понятия (например, «точка», «отрезок» и т.д.).

В математике к определениям предъявляются особенно высокие требования, например в связи с точностью и однозначностью смысла логических конструкций, с помощью которых описываются новые понятия через уже известные. Выполнение таких требований для многих других наук оказывается желаемым, но часто недостижимым идеалом. Однако и сама математика испытывает подобные трудности в построении своих теорий: дело в том, что какие-то понятия неизбежно оказываются *первичными*, так как для них не находится других понятий, на точное описание содержания которых можно было бы опереться в определениях. Важнейшим среди них является понятие «множество».

Ясно, что первичные понятия можно описать, неизбежно допустив какую-то долю неопределенности их смысла. В математике найден замечательный способ существенно уменьшить эту долю путем использования так называемого аксиоматического метода (о котором далее еще пойдет речь). Этот метод оказывается удобным и для определения очень многих важнейших математических понятий, которые первичными не являются.

Для целей данного курса математики вполне достаточно ограничиться и более простым описанием смысла понятия «множество»: *любая совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы, называемых элементами.*

Можно рассмотреть, например, множество студентов в некоторой группе, совокупность молекул воды на Земле. Однако множества, которые изучаются в математике, обычно не являются реальными объектами. Чаше всего это абстракции реальных предметов, которые возникают, если отказаться от рассмотрения практически всех их качественных свойств (цвета, запаха, веществ, из которых они состоят, и т. д.), сохранив лишь несколько их характеристик, связанных с формой, размерами, численностью, устройством (структурой). Поэтому и в данном курсе речь пойдет в основном о различных множествах чисел, точек, фигур и т. п.

Объединение объектов в множество, по сути, означает существование правила, следуя которому любой объект, который может быть рассмотрен (обозначен и т. п.), однозначно относится к данному множеству или не относится. Подобное правило чаще всего использует характерные свойства, признаки объекта, отличающие элементы данного множества. Например, множество четных чисел можно выделить среди всевозможных натуральных чисел по признаку «делится нацело на 2», а множество целых чисел выделяется среди всевозможных чисел именно признаком «целостности», смысл которого должен быть специально описан.

Нередко используется и самый простой прием задания — простое перечисление элементов.

Например, множество арабских цифр — это совокупность знаков: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Этот способ применим только для так называемых конечных множеств, для которых имеет смысл понятие «число элементов». Однако в математике часто встречаются и бесконечные множества, простейшим примером которых является множество натуральных чисел:

$1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Множества чаще всего обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а их элементы — строчными. Запись $a \in A$ означает: « a является элементом множества A » или « a принадлежит A ». Аналогично, $z \notin X$ означает, что z не принадлежит множеству X .

Если каждый элемент множества A одновременно является и элементом множества B , то говорят, что множество A является *подмножеством* множества B , и записывают: $A \subseteq B$. Если при этом в B есть элементы, не принадлежащие A (т.е. множества A и B не совпадают), то пишут: $A \subset B$.

Для всякого множества A можно рассмотреть *множество всех его подмножеств* $\rho(A)$, в которое войдут одноэлементные подмножества (состоящие всего из одного элемента), всевозможные пары элементов, тройки и т.д. При этом множество, взятое в целом, также окажется элементом $\rho(A)$.

Полезно ввести в рассмотрение пустое множество $\emptyset$. В нем нет ни одного элемента, поэтому можно считать, что $\emptyset$ является подмножеством любого множества.

Над множествами можно выполнять операции. Простейшие из них: сумма, или объединение, двух множеств A и B , обозначаемое $A \cup B$, и произведение, или пересечение, обозначаемое $A \cap B$.

Определение. Сумма (объединение) двух множеств $A \cup B$ является множеством, каждый элемент которого принадлежит либо множеству A , либо множеству B .

Пересечение двух множеств $A \cap B$ является множеством, каждый элемент которого принадлежит как множеству A , так и множеству B .

Символически операции объединения (рис. 1, *а*) и пересечения (рис. 1, *б*) показаны выделенными цветом участками на схемах (называемых кругами Эйлера), в которых множества A и B обозначены как совокупности точек кругов.

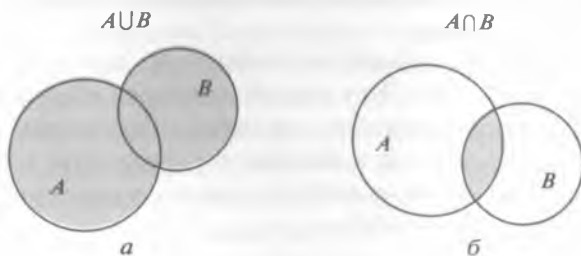


Рис. 1

Например, суммой множества четных и множества нечетных чисел оказывается множество всех натуральных чисел.

Ясно, что пересечение двух множеств может оказаться и пустым. Например, если A — множество решений уравнения $x + y = 1$, т.е. всевозможных пар чисел x и y , дающих в сумме 1 (таких решений, очевидно, бесконечно много), а B — множество решений уравнения $x + y = 2$, то $A \cap B = \emptyset$, так как у системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ x + y = 2 \end{cases}$$

решений нет (если сумма двух чисел оказалась равна 1, то она же не может равняться 2).

Заслуживает внимания еще одна операция, называемая *декартовым произведением* двух множеств A и B и обозначаемая $A \times B$. В результате ее выполнения возникает множество, состоящее из всевозможных пар элементов (a, b) , где $a \in A$ и $b \in B$. Порядок элементов в парах учитывается, т.е. $A \times B$ и $B \times A$ являются в общем случае разными множествами. Случай совпадения множеств A и B допускается: возникает $A \times A$ — это всевозможные пары элементов, взятых из множества A , в том числе пары вида (a, a) , где $a \in A$.

Например, множество точек прямоугольника (рис. 2) можно рассматривать как декартово произведение точек отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$.

Оказывается, что указанные выше операции, и в первую очередь рассмотрение множества всех подмножеств и образование декартова произведения, позволяют строго описать все основные структуры современной математики.

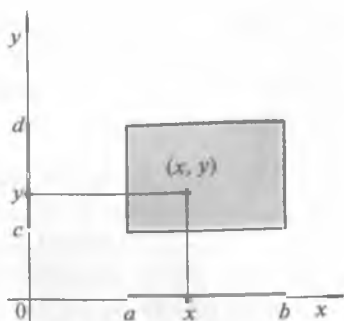


Рис. 2

1.2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Одно из самых важных математических понятий — функция. Оно лежит в основе построения всех математических дисциплин (алгебры, геометрии, теории вероятностей и др.), выступая в них в различных

своих разновидностях (числовые функции, преобразования, операторы, функционалы и т. д.). Суть этого понятия — взаимосвязь между элементами двух множеств, подчиненная небольшому числу ограничений.

О п р е д е л е н и е. Пусть заданы два множества X и Y (любой природы). Предположим, что каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие (сопоставлен) один определенный элемент $y \in Y$. Указанное соответствие называют *функцией*, определенной на множестве X со значениями во множестве Y . Синонимом термина «функция» является слово «*отображение*».

Для обозначения функции используется запись $y = f(x)$ (читается «... эф от икс»), причем символ функции может быть любой буквой: $y = F(x)$; $y = g(x)$; $y = y(x)$ и т. п., что позволяет рассматривать одновременно несколько разных функций. Иногда используется и запись вида $X \xrightarrow{f} Y$.

Таким образом, под функцией понимается сам закон (правило), который описывает способ (возможность) нахождения по любому заданному значению $x \in X$ соответствующего элемента $y \in Y$.

Элемент $x \in X$ называют *аргументом* функции, а иногда — *значением независимой переменной* (в тех случаях, когда, рассматривая упомянутое соответствие, желают подчеркнуть, что значения элементов из множества X можно произвольно, по своему выбору менять). Элементы y , сопоставленные каким-то x , называют *значениями функции* или *значениями зависимой переменной*, а иногда и *образами* элемента x , которые тогда уместно назвать *прообразами* элемента y .

Предположим, что a — конкретный элемент из X . Тогда запись $f(a)$ указывает на конкретный элемент из Y , который сопоставлен элементу a . Сам закон сопоставления элементов из X и Y позволяет найти этот элемент, единственный образ $f(a) \in Y$.

Множество X называют *областью определения* функции, а множество Y_1 , состоящее из всех значений функции (т. е. множество всех образов элементов x), — *множеством значений* функции.

Ясно, что произвольно взятый элемент $y \in Y$ вовсе не обязательно должен быть образом какого-то элемента из X . Поэтому $Y_1 \subseteq Y$, и различают отображения X в Y , если $Y_1 \subset Y$, и отображения X на Y , если $Y_1 = Y$.

Заметим, что понятие функции легко истолковать, пользуясь понятием декартова произведения $X \times Y$. В самом деле, как ясно из предыдущего, сопоставление элементов x и y — это, по сути,

образование пары (x, y) . Таким образом, задать функцию вида $X \xrightarrow{f} Y$ — это значит указать любое подмножество в $X \times Y$, в котором для каждого $x \in X$ найдется единственный элемент (x, y) .

Обратимся к примерам функций.

Пример 1. Пусть X и Y — множество действительных чисел (обычно обозначаемое $\mathbb{R}$) и указана формула $y = x^2 + 1$.

Заметим, что формулы — это особый математический язык, позволяющий на основе общепринятых договоренностей кратко обозначать последовательность некоторых известных математических операций.

В данном случае если заданное число x умножить само на себя и к результату добавить 1, то получится число y .

Ясно, что указанная формула задает функцию, определенную для всех действительных чисел, а множеством значений этой функции является луч $[1, \infty)$.

Функции, заданные формулами, называют еще заданными *аналитически*. Обычно это *числовые функции*, т.е. определенные и имеющие свои значения на числовых множествах.

Пример 2. Важный частный случай числовых функций — *числовые последовательности*. Они определены на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел и, следовательно, каждому натуральному числу сопоставляют некоторое действительное число:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & \dots, & n, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n, & \dots \end{array}$$

В нашей записи индекс у переменной x как раз и указывает на соответствующее натуральное число, которому сопоставлено значение x . Чаще всего используют краткую запись: (x_n) , $n = 1, 2, \dots$. Числа $x_1, x_2, \dots$ называют *членами последовательности*, а x_n — *общим членом*.

Например,

$(1/n)$, $n = 1, 2, \dots$, т.е. $1; 1/2; 1/3; \dots; 1/n; \dots$,

$(-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$, т.е. $-1; 1; -1; \dots; (-1)^n; \dots$,

(n^2) , $n = 1, 2, \dots$, т.е. $1; 4; 9; \dots; n^2; \dots$.

Заметим, что индекс может обозначаться любой буквой, чаще всего: n, k, i .

Пример 3. Числовую функцию можно задать *таблицей*. Аргумент x пробегает конечное множество значений, приведенных в пер-

вой строке, а соответствующие значения функции y указаны во второй строке.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	3	-1	0	1	2	0

Пример 4. Если на карте отметить две точки A и B , то, пользуясь масштабом карты, можно вычислить расстояние между ними. Можно сказать, что расстояние — это функция от двух переменных (являющихся точками на плоскости) со значениями во множестве положительных действительных чисел.

Строго говоря, до сих пор речь шла только о функциях одной независимой переменной ($y = f(x)$), а функции нескольких переменных еще не были определены. Но это легко сделать, вновь обратившись к понятию декартова произведения: функция $y = f(x_1, x_2)$ двух независимых переменных x_1, x_2 , где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, это функция, определенная на $X_1 \times X_2$, т.е. сопоставляющая каждой паре (x_1, x_2) элемент y . Аналогично можно определить функцию любого числа независимых переменных.

Пример 5. Пусть X — множество треугольников на плоскости. Тогда площадь треугольника — это функция, поскольку известно правило, позволяющее найти всегда существующее и единственное значение площади каждого данного треугольника. Заметим, что аналогичное утверждение нельзя высказать по отношению к произвольным множествам точек на плоскости хотя бы потому, что для некоторых особенно сложно «устроенных» множеств такое правило неизвестно и, более того, можно показать, что оно, вообще говоря, и не существует. Фигуры, ограниченные «гладкими» линиями, конечно, имеют площадь, однако вопрос о том, как ее вычислить, оказывается довольно сложным.

1.3. ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

В определении функции однозначность образа y для каждого x обозначена как ее основное характеристическое свойство. Если функция $y = f(x)$ задана на множестве X и Y — множество ее значений, то всегда можно, взяв любой элемент y из множества ее значений, сопоставить ему все его прообразы. Прообразов может оказаться более одного, поэтому такое сопоставление в общем случае будет

иметь вид: $y \rightarrow \{x\}$, где $\{x\}$ — подмножество из X , каждый элемент x_0 которого обладает свойством: $f(x_0) = y$ ($x_0 \in \{x\}$).

Например, для функции $y = x^2 + 1$ у образа $y = 5$ есть два прообраза: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$; аналогично для функции, заданной в подразд. 1.2 таблицей: у образов $y = 3$, $y = -1$, $y = 1$ и $y = 2$ есть только по одному прообразу, однако при $y = 0$ их уже два: $x_1 = 1,5$ и $x_2 = 3$; у каждого из членов последовательности $(-1)^n$ таких прообразов будет бесконечно много, поскольку значение 1 появляется при всех четных n ($n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$), а значение -1 — при всех нечетных n ($n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$).

Следовательно, в общем случае оказывается, что для функции $y = f(x)$ обратное сопоставление каждому образу всех его прообразов функцией не является: может нарушаться свойство однозначности. Поэтому заслуживает специального внимания частный случай функции, для которой не только определяющее ее сопоставление ($x \rightarrow y$), но и обратное ему ($y \rightarrow \{x\}$, где $f(x) = y$ для любых $x \in \{x\}$) тоже будет функцией, которая называется *обратной к данной*.

Соответствующее отображение называется *взаимно-однозначным*. Можно сказать, что взаимно-однозначные отображения — это функции, имеющие обратную функцию.

Для того чтобы подчеркнуть связь обратной функции с исходной, для функции, обратной к $y = f(x)$, часто используют обозначение $x = f^{-1}(y)$. Для взаимно-однозначных отображений символически можно записать:

$$X \xrightarrow{f} Y;$$

$$X \xleftarrow{f^{-1}} Y.$$

Заметим, что если характеризовать функции парами значений x и y , то для исходной и обратной функций оказываются объединенными в пары одни и те же значения. Однако если для функции $y = f(x)$ эти пары имеют вид (x, y) , то для обратной функции те же самые элементы будут объединены в пары (y, x) . В частности, если речь идет о числовых функциях, то такие пары можно истолковать как координаты точек на плоскости. Тогда легко понять, что график обратной функции можно получить из графика исходной функции, изобразив множество точек на плоскости симметрично относительно прямой $y = x$.

В самом деле, как ясно из рис. 3, каждую точку графика функции можно истолковать и как точку графика обратной функции (сопоставление точек указано стрелками).

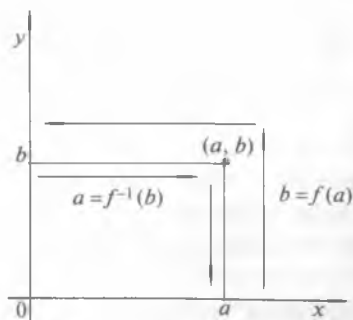


Рис. 3

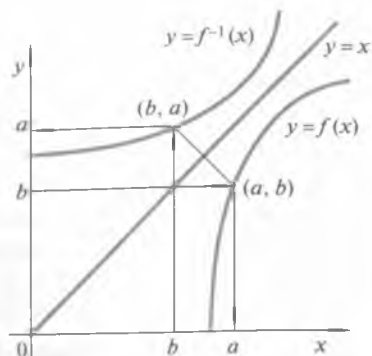


Рис. 4

Однако для традиционного изображения графика обратной функции, записанной в виде $y = f^{-1}(x)$, а не в виде $x = f^{-1}(y)$ (когда значения независимой переменной изображаются точками на горизонтальной оси, а зависимой — на вертикальной), придется поменять ролями оси координат и сменить их обозначения: x — на y , а y — на x . При сохранении исходной системы координат придется преобразовать сам график — по симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 4).

Рассмотрим несколько примеров взаимно-однозначных отображений (соответствий).

1. Список студентов, присутствующих на занятии, находится во взаимно-однозначном соответствии с их множеством (при отсутствии однофамильцев).

2. Если задать на плоскости систему прямоугольных координат, то каждой точке на плоскости будет соответствовать единственная пара чисел (x, y) , где x и y — координаты точки, и, наоборот, любой упорядоченной паре чисел будет соответствовать единственная точка на плоскости. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством точек на плоскости и множеством упорядоченных пар чисел (т.е. в каждой паре должно быть указано, какой элемент объявляется первым, а какой — вторым).

3. Рассмотрим функцию $y = 2x + 1$, определенную на множестве всех действительных чисел. По указанной формуле, зная значение x , легко найти соответствующее ему значение y . У этой функции существует обратная, аналитическое задание которой можно получить, если выразить x через y : $x = (y - 1)/2$. Ясно, что множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют последнему ра-

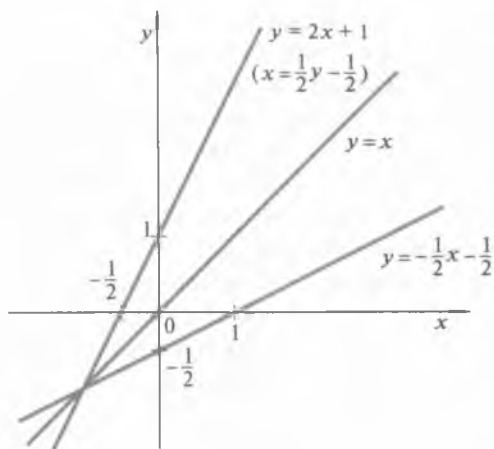


Рис. 5

венству, будет тем же самым, что и для равенства $y = 2x + 1$. Это прямая, изображенная на рис. 5. Если же мы пожелаем написать формулу обратной функции в традиционных обозначениях для независимой и зависимой переменных ($y = f^{-1}(x)$), то придется сменить обозначения переменных: x заменить на y , а y — на x . Тогда график обратной функции $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ предстанет в виде прямой, также изображенной на рис. 5, — она симметрична упомянутой выше прямой относительно $y = x$ — биссектрисы первого координатного угла. Ясно, что каждая из функций (исходная и обратная к ней) задают взаимно-однозначное соответствие между точками числовых осей Ox и Oy .

1.4. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, ТОЖДЕСТВА

Пусть на некотором множестве X определены две функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, значения которых принадлежат множеству Y . Тогда можно высказать утверждение $f_1(x) = f_2(x)$, которое может оказаться **истинным** для одних значений аргумента $x \in X$ и **ложным** — для других. Такое утверждение называется *уравнением*. Каждое фиксированное значение x_0 , для которого верно равенство $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ (т.е. упомянутое утверждение истинно), называется *решением* уравнения.

Часто ставится задача о нахождении всех решений данного уравнения или о доказательстве факта, что решений нет (т. е. их множество пусто). Тогда говорят: «Решите уравнение ...». Отыскиваемое значение x в этом случае часто называют *неизвестным* в уравнении.

Если любое значение x из некоторого множества X_1 ($X_1 \subseteq X$) является решением данного уравнения, то его называют *тождеством* на множестве X_1 . Желая подчеркнуть, что некоторое уравнение является тождеством, иногда пишут: $f_1(x) \equiv f_2(x), x \in X_1$.

Ясно, что любое уравнение с числовыми функциями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ легко преобразовать к виду $F(x) = 0$, если обозначить $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Заметим, что для произвольных функций операция вычитания может быть не определена.

Пример 1. Пусть $F(x) = x^2 - 2$, т. е. уравнение имеет вид: $x^2 - 2 = 0$. Функция $F(x)$ может быть определена (рассмотрена) на разных множествах значений x . Например, X может быть множеством рациональных чисел, или множеством действительных чисел, или отрезком $[0, 1]$.

В первом случае решений нет, поскольку не существует ни одного рационального числа r , для которого равенство $r^2 - 2 = 0$ было бы верным. Если же x может принимать любые действительные значения, то найдется ровно два решения: $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$. В последнем случае решений нет, поскольку оба числа x_1, x_2 находятся вне отрезка $[0, 1]$.

Пример 2. Пусть дано уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ с двумя переменными x и y . Любая пара чисел (x, y) , которая при подстановке в уравнение превращает его в верное равенство, будет его решением.

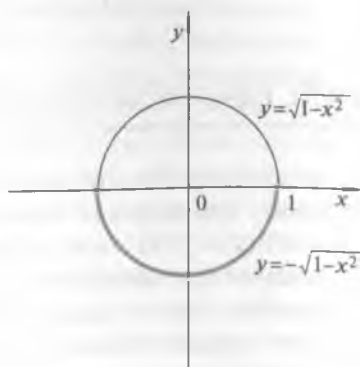


Рис. 6

Например, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Можно, очевидно, указать бесконечно много таких пар. Соответствующее им множество точек на плоскости образует окружность, изображенную на рис. 6.

Однако такое уравнение можно истолковать и иначе, если рассматривать y как функцию от x : $y = y(x)$. Тогда его решением должна быть объявлена любая функция $y = y(x)$, определенная на некотором множестве X , такая, что для любого $x_0 \in X$ утверждение $x_0^2 + [y(x_0)]^2 - 1 = 0$ истинно, т.е. данное равенство является тождеством на X .

Другими словами, $y = y(x)$ — решение, если при подстановке $y(x)$ в уравнение (вместо y) уравнение обращается в тождество по переменной x .

В данном случае легко указать по крайней мере два решения такого, образно говоря, функционального уравнения: $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$. Вообще, любое уравнение вида $F(x, y) = 0$ можно рассмотреть как функциональное, объявив y неизвестной функцией от x .

Пример 3. Равенство $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ является тождеством для любых пар чисел (x, y) , поскольку, выполнив соответствующие арифметические действия, легко преобразовать его в тождество вида $0 = 0$. Это же равенство является тождеством и как функциональное уравнение: оно истинно для любой числовой функции $y = y(x)$.

Уравнения можно классифицировать в зависимости от вида функций (иногда говорят — выражений), которые их задают. Например, если в уравнении $F(x) = 0$ функция $F(x)$ является многочленом

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — действительные числа, то уравнение называют *алгебраическим*, а его решения — *корнями*.

В частности:

- $ax + b = 0$ — линейное уравнение ($a \neq 0$), у него всегда существует единственный корень $x = -\frac{b}{a}$;
- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) — квадратное уравнение, для него можно подсчитать так называемый дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных корня: $x_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{D})$ и $x_2 = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{D})$, которые в случае $D = 0$ совпадают: $x_1 = x_2$; при $D < 0$ действительных корней нет.

В последующих подразделах курса будут рассматриваться многие функции (показательные, логарифмические, тригонометрические и др.). Участие их в записи уравнений приводит к возникновению еще многих классов так называемых *трансцендентных* (неалгебраических) уравнений. Их решение часто оказывается сложной задачей, разрешимой разве лишь приближенными методами.

Для практического решения уравнений обычно приходится выполнять некоторые их преобразования, переходя от уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ к другому: $f_3(x) = f_4(x)$. При этом важно следить за тем, чтобы уравнения были *равносильными* (*эквивалентными*), т.е. множества их решений совпадали. Это значит, что каждое решение первого уравнения является решением и второго уравнения и наоборот; либо оба уравнения решений не имеют.

Для числовых уравнений заведомо эквивалентные уравнения возникают, если переносить какие-то функции из одной части равенства в другую, меняя при этом знак перед ними, умножать (делить) обе части равенства на функции (в частности, на числа), не обращающиеся в нуль. А вот, например, возведение обеих частей уравнения в квадрат может привести к неэквивалентным уравнениям.

Например, уравнение $(x^2 + 1)(x - 1) = 0$ для действительных x эквивалентно уравнению $x - 1 = 0$, так как $x^2 + 1 \neq 0$.

А теперь рассмотрим уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x-3} = 0$ или эквивалентное ему $\sqrt{x+1} = -\sqrt{x^2+x-3}$. При возведении обеих частей равенства в квадрат получаем: $x + 1 = x^2 + x - 3$, т.е. $x^2 - 4 = 0$, или $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Подставляя x_1 в исходное уравнение, замечаем, что оно теряет смысл, поскольку квадратный корень из отрицательного числа не имеет действительных значений. В подобных случаях говорят, что при возведении в квадрат возник посторонний корень. Обычно посторонние корни отсеивают проверкой (подстановкой в исходное уравнение).

Для числовых функций определено и понятие неравенства: «больше», «больше или равно», «меньше», «меньше или равно» ($>$, $\geq$, $<$, $\leq$). Утверждения о неравенствах числовых значений двух функций, определенных на некотором множестве, называют *неравенствами*. Понятия о решении и равносильности неравенств аналогичны описанным ранее для уравнений.

Пример 4. Неравенство $x + 1 > 0$ имеет бесконечно много решений, к которым относятся все числа $x > -1$.

Пример 5. Все решения неравенства $x^2 \leq 4$ образуют отрезок $[-2, 2]$, поскольку любое число $-2 \leq x \leq 2$ при возведении в квадрат оказывается не превосходящим 4.

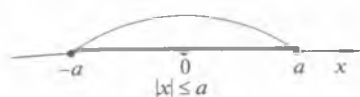


Рис. 7

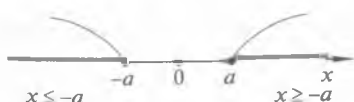


Рис. 8

Вообще, решением неравенства $x^2 \leq a^2$ является множество значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| \leq a$ ($a > 0$) (т.е. тех, у которых абсолютная величина не превосходит a) или эквивалентному ему $-a \leq x \leq a$ (рис. 7).

Аналогично решением неравенства $x^2 \geq a^2$, или эквивалентного ему $|x| \geq a$, являются два луча $x \leq -a$ и $x \geq a$ (рис. 8).

Пример 6. Рассмотрим неравенство $x + y < 1$. Его решения образуют нижнюю полуплоскость, ограниченную линией $x + y = 1$ (сама линия в нее не входит). При практическом определении, какая именно полуплоскость задается аналогичными неравенствами с двумя переменными, в неравенство подставляют координаты любой точки, не расположенной на разделяющей линии. В данном случае очевидно, например, что координаты точки $(0, 0)$ удовлетворяют неравенству (рис. 9).

Иногда уравнения и (или) неравенства объединяют в системы. Решением системы является любой набор значений всех неизвестных, для которых истинны все утверждения о равенствах или неравенствах значений соответствующих функций.

Пример 7. Система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0; \\ x + y \geq 1, \end{cases}$$

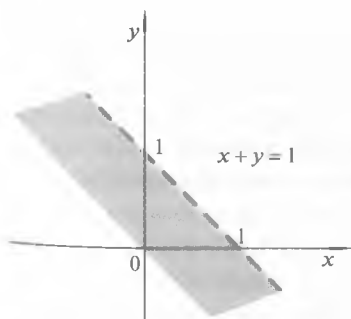


Рис. 9

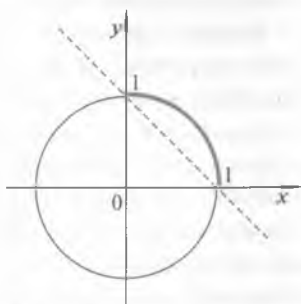


Рис. 10

как ясно из предыдущих рассуждений, имеет решением множество точек дуги окружности, изображенной на рис. 10 (включая ее концевые точки).

* 1.5. ПОНЯТИЕ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Рассуждая о множествах, мы до сих пор не предполагали, что между их элементами определены какие-то взаимосвязи или операции, т. е. множества мыслились как объединения элементов, в общем случае не наделенные какой-либо организованностью или, как говорят в математике, *структурой*. С понятием функции ситуация аналогичная: пока предполагалась лишь однозначность соответствия элементов двух множеств. Однако ясно, что на «устройство» множества, точно так же как и на закон соответствия, задающий функцию, можно было бы наложить еще некоторые дополнительные условия. Тогда их свойства могли бы существенно обогатиться, а наделенные соответствующими структурами множества и функции — оказаться хорошими моделями реальных объектов, закономерностей и процессов окружающего мира.

Структуры множеств, которые чаще всего рассматриваются в математике, образуют несколько больших классов. Среди них *алгебраические структуры*, характерными представителями которых являются операции сложения и умножения элементов. Эти операции хорошо известны для числовых множеств. Например, для любых двух чисел x и y (натуральных, целых, рациональных, действительных или комплексных) определено число z , называемое их суммой (обозначение: $z = x + y$). При этом операция сложения обладает несколькими (принципиально важными для сущности данной операции) свойствами, например: *ассоциативностью*: $a + (b + c) = (a + b) + c$, *коммутативностью*: $a + b = b + a$.

Конечно, не только для числовых множеств вводятся алгебраические структуры. В подразд. 1.1 упоминались операции суммы (объединения) и произведения (пересечения) для произвольных множеств. Оказывается, что, например, и для логических операций «и», «или» может быть определена специальная, весьма полезная «алгебра».

Обратим внимание, что для математически строгого определения алгебраических структур (так же как и других, обсуждаемых ниже) вполне достаточно использования уже введенных выше понятий. В самом деле, например, операция сложения двух элементов данного множества A — это отображение, сопоставляющее каждой паре

(x, y) элементов из A некоторого (однозначно определенного) элемента $z \in A$, т.е. отображение вида $A \times A \rightarrow A$. Однако не любое такое отображение, а обязательно подчиняющееся нескольким требованиям, которые в математике часто называют *аксиомами*. Таких аксиом обычно совсем немного: для сложения и умножения обязательна ассоциативность, но даже коммутативность требуется не всегда. Например, для множества, структуру которого определяет наличие всего одной операции сложения (или умножения), набор аксиом составляет список:

- 1) если $x \in A$ и $y \in A$, то $x + y \in A$;
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);
- 3) в A существует элемент e (называемый *нейтральным*), такой, что $a + e = e + a = a$;
- 4) для любого $x \in A$ существует элемент $(-x) \in A$ такой, что $x + (-x) = (-x) + x = e$.

Множество, удовлетворяющее указанным аксиомам, называется *группой*.

Другой важный класс структур – *структуры порядка*. Они вводятся путем определения так называемого отношения порядка, которым могут быть связаны любые два элемента данного множества или лишь некоторые (тогда говорят о частичной упорядоченности). Простейший пример определения отношения порядка для действительных чисел — введение понятия «меньше» (или «больше»): $<$ (или $>$). Для любых двух (различных) чисел x и y либо x меньше y , либо y меньше x . Основная аксиома для отношения порядка — требование транзитивности (для числовых множеств оно выглядит так: если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$).

Структуры порядка важны в приложениях математики прежде всего в связи с решением задач об измерении тех или иных качеств реальных систем.

Еще один класс структур – *топологические*. В основе их определения лежит понятие о непрерывности, являющееся фундаментом моделирования и математического анализа процессов, происходящих в реальном мире. Рассмотрению некоторых свойств таких структур посвящено несколько последних подразделов данного курса.

Фактически каждая математическая дисциплина занимается исследованием избранного ею класса структур, который и определяет специфику ее методов, теорий и практических приложений. В качестве наиболее корректного способа описания структур математика признает *аксиоматический метод*. Суть его в том, что вводятся в рассмотрение первичные (неопределяемые) объекты, на

самом деле — только их наименования. Свойства этих объектов, их взаимосвязи исчерпывающим образом формулируются в специальных предложениях, называемых *аксиомами*. Такой подход позволяет рассматривать многочисленные интерпретации обсуждаемых математических объектов, т.е. какие-то конкретные множества, для элементов которых аксиомы выполняются. Ясно, что элементы таких множеств могут обладать еще очень многими другими свойствами, но они совершенно не принимаются во внимание в рамках той конкретной теории, которая строится аксиоматическим методом.

Вопрос об «очевидности» аксиом не имеет смысла: для некоторых интерпретаций они выполняются, и поэтому будут выполняться и все следствия принятия соответствующих предложений как истинных; для других — не выполняются, значит, это совсем другие математические структуры.

Применение аксиоматического метода построения математических теорий предполагает, что зафиксированы (определены) правила вывода, т.е. набор логических средств, позволяющих формулировать определения новых понятий, используя первичные и ранее уже определенные понятия, а также устанавливать истинность (проводить доказательство) новых предложений (теорем). При этом могут использоваться как истинные все аксиомы и ранее доказанные теоремы. Так возникают математические теории, все утверждения которых будут верны в любой интерпретации. В идеале правила вывода должны быть сформулированы математически строго, что в ряде случаев удается сделать в рамках так называемой *математической логики*.

К системам аксиом в математике предъявляются еще и требования непротиворечивости, независимости и полноты.

Система аксиом называется *непротиворечивой*, если из нее нельзя логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения. Обычно непротиворечивость доказывается построением полноценной интерпретации, связанной с уже построенными содержательными математическими теориями. Тем самым непротиворечивость данной аксиоматики доказывается, образно говоря, косвенно: она непротиворечива, если существуют ее интерпретации.

Непротиворечивая система аксиом называется *независимой*, если никакая из аксиом системы не является логическим следствием других аксиом системы. По существу, требование независимости сводится к минимизации набора аксиом, достаточного для построения теории. Интересно, что независимость можно доказать, если убедиться в непротиворечивости всех таких систем аксиом, которые

получаются из данной системы, если одна аксиома заменена ее противоположным утверждением, а все остальные аксиомы оставлены без изменения.

Система аксиом называется *категоричной*, если все ее интерпретации имеют эквивалентную структуру, точнее, являются изоморфными (суть последнего, очень важного в математике понятия мы обсудим далее).

Ясно, что описанные выше требования являются чрезвычайно жесткими. Выполнить их полностью удастся лишь на завершающих этапах построения той или иной математической теории. На этапах, когда теория еще строится или, например, излагается в учебных курсах, доказательства нередко оказываются не вполне строгими, а сам аксиоматический метод не всегда удобен, поскольку именно содержательные интерпретации позволяют человеку оперировать реальными образами математических объектов в тех случаях, когда он проводит эвристические рассуждения или доказательства или, например, пытается понять смысл учебного математического текста. Тем не менее при изучении математики очень полезно иметь в виду описанные ранее «идеалы» в построении математических теорий, поскольку настойчивое стремление к ним объясняет главную логику формирования математики как системы, а понимание этой логики существенно облегчает ее изучение.

Обратим теперь внимание, что, поставив в начале подраздела вопрос о возможности наделения рассматриваемых множеств и их отображений специальными структурами, мы еще совсем не обсуждали его в связи с понятием «функция». Ясно, что если область определения X и множество значений функции Y не наделены какими-то структурами, то мало смысла говорить о каких-то «хороших» свойствах функций вида $X \rightarrow Y$. Однако если X и Y такими структурами обладают, то возникает интересный вопрос о возможных взаимосвязях между ними, поскольку именно такие взаимосвязи могли бы описывать в виде моделей закономерности окружающего мира. И тогда все зависит от свойств функций, отображающих X на Y .

Предположим, что $y = f(x)$ отображает взаимно-однозначно X на Y , причем на множестве X задана структура, связанная с операцией сложения ($x_1 + x_2 = x_3$), а на множестве Y — структура, связанная с операцией умножения ($y_1 \cdot y_2 = y_3$), подчиненные соответствующим системам аксиом. Пусть $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$. Может случиться, что если $x_1 + x_2 = x_3$, то $y_1 \cdot y_2 \neq y_3$. И наоборот, т.е. данная функция не только устанавливает взаимно-однозначное соответствие

между элементами множеств X и Y , но и задает связь между операциями, определенными на X и Y . Образно говоря, функция $y = f(x)$ преобразует структуру одного множества в структуру другого.

Такого типа соответствия называются *изоморфизмами*. Изоморфизмы двух множеств могут быть связаны с любыми структурами и, по сути, позволяют рассматривать структуры одного множества как модели структур другого множества. Поэтому понятие изоморфизма является основой всех видов математического моделирования реальных объектов, процессов и явлений.

Пусть X — множество натуральных чисел, для которого рассмотрим структуру, связанную с операцией сложения ($n_1 + n_2 = n_3$). Пусть Y — множество всевозможных натуральных степеней числа 2 (т.е. последовательность 2, 4, 8, ...), для которых рассмотрим структуру, связанную с операцией умножения: $y_1 \cdot y_2 = y_3$. Например, для функции $y = 2^n$ обозначим $y_1 = 2^{n_1}$, $y_2 = 2^{n_2}$, $y_3 = 2^{n_3}$. Как известно, $2^{n_1+n_2} = 2^{n_1} \cdot 2^{n_2}$, поэтому если $n_1 + n_2 = n_3$, то $y_1 \cdot y_2 = y_3$, и, значит, данная функция задает указанный выше изоморфизм.

Еще один пример изоморфизма — связь между действительными числами и множеством точек на числовой оси, при которой структуре порядка для чисел (соотношение «меньше») соответствует геометрическая структура порядка для точек (соотношение «лежит левее»).

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В гл. 1 уже обращалось внимание на то, что в математике изначально не накладывается каких-либо ограничений на природу рассматриваемых множеств и их отображений. Но как же в этом бесконечном разнообразии исследовать их сходство и различия, обнаруживать закономерности во взаимосвязях элементов, утверждать или отрицать наличие определенных, неочевидных свойств?

Математика нашла метод. Суть его в специальном построении и использовании в анализе некоторых конкретных множеств. Их сравнительно немного, но они чрезвычайно полезны и удобны для исследования свойств многих других множеств. Элементы таких множеств не являются реальными объектами окружающего мира, они лишены всех качественных свойств (цвета, запаха, электрического заряда и т.п.), кроме четко зафиксированного набора, представленного, как правило, очень небольшим перечнем свойств. Эти свойства (введенные операции, соотношения, взаимосвязи) и задают структуру упомянутых множеств, которая может сопоставляться со структурой других множеств ради их исследования.

Первостепенная роль здесь принадлежит *числовым множествам*: множеству натуральных чисел ($\mathbb{N}$), целых ($\mathbb{Z}$), рациональных ($\mathbb{Q}$), действительных ($\mathbb{R}$) и комплексных ($\mathbb{C}$). Их свойства во многом уже знакомы читателю из курса математики средней школы. Однако полноценная теория их достаточно сложна и не может быть в нем представлена. Поэтому ради достаточного понимания ее для целей наших дальнейших построений приведем краткий обзор свойств перечисленных числовых множеств.

Можно было бы сказать совсем просто: множество $\mathbb{N}$ — это набор чисел 1, 2, ... , n , Но тем самым мы указали бы, причем весьма неполно, только какие-то обозначения (наименования) элементов множества $\mathbb{N}$. И сразу возникли бы непростые вопросы.

Что же можно делать с этими объектами?

Набор элементов I, II, III, IV, ... или слов «один», «два», «три», «четыре» ... — это то же самое или другое множество?

Как взаимосвязано множество $\mathbb{N}$ с множеством элементов из окружающего мира?

Можно ли сказать, что множество $\mathbb{N}$ существует, если его элементы не являются реальными объектами?

Корректное определение множества $\mathbb{N}$ в некотором смысле особенно сложно, поскольку логически это первая числовая система, опираясь на которую можно строить другие числовые системы, пополняя предшествующую новыми элементами с тем, чтобы операции, которые не всегда в ней выполнялись, стали осуществимы в расширенной системе. В современном варианте это *аксиоматическое определение*, причем в качестве аксиом выбираются такие свойства, которые позволяют моделировать счет реальных предметов, сравнение множеств по числу элементов, процедуру сложения элементов, очень часто реализуемую в жизнедеятельности людей.

Наиболее известна система из четырех аксиом Пеано, которая (говоря описательно) определяет $\mathbb{N}$ как любое непустое множество, в котором введено однозначное отношение «следует за» для всех чисел, кроме особого числа, называемого 1 (не следующего ни за каким числом), и действует так называемая аксиома *индукции*. В менее «экономичном» варианте описания система натуральных чисел $\mathbb{N}$ оказывается множеством, в котором определена операция *сложения элементов*: если $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}$, то существует элемент $c \in \mathbb{N}$, называемый *суммой* ($a + b = c$), причем выполняются свойства:

$$a + b = b + a \text{ (коммутативность сложения);}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ (ассоциативность сложения).}$$

С помощью операции сложения можно определить и *умножение* ($ab = c$), также обладающее свойством коммутативности и ассоциативности, а в комбинации со сложением и свойством *дистрибутивности*: $(a + b)c = ac + bc$.

В $\mathbb{N}$ определена также операция *сравнения* элементов $a < b$, при которой для любых $a, b \in \mathbb{N}$ выполняется точно одно из следующих соотношений:

$$a < b; \quad b < a; \quad a = b.$$

Можно указать и еще ряд простых свойств $\mathbb{N}$, хорошо известных читателю, из которых напомним лишь полезное следствие упомянутого ранее свойства индукции, называемое *методом математической индукции*.

Пусть некоторое утверждение A , имеющее смысл для любых натуральных чисел, верно при $n = 1$. В предположении о том, что оно верно при $n = k$, оказывается, что оно верно при $n = k + 1$. Тогда A верно при $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Например, } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Действительно, при $n = 1$ формула верна: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Предполагаем, что она верна для фиксированного n (ради экономии записи буквы k мы не вводим). Убедимся, что тогда будет верно и

$$[1 + 2 + \dots + n] + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Но это легко проверяется, так как слева имеем

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Система натуральных чисел $\mathbb{N}$ нередко используется в отображении множеств. Вспомним, что функции, определенные на $\mathbb{N}$, имели специальное название — *последовательности*. А главное практическое использование $\mathbb{N}$ — счет предметов, при котором натуральные числа оказываются характеристиками элементов некоторого множества. Речь идет о *конечных* множествах, для которых могут быть построены взаимно-однозначные соответствия с отрезками натурального ряда чисел (какой-то элемент объявлен первым, вторым и т. д., и процесс такой нумерации на каком-то шаге заканчивается, а последний присвоенный номер указывает число элементов множества).

Все множество $\mathbb{N}$, взятое в целом, оказывается *бесконечным*, причем в определенном смысле это наименее «богатое» элементами множество среди всевозможных бесконечных множеств (понятие «число элементов» здесь теряет смысл). Например, обсуждаемое далее множество действительных чисел $\mathbb{R}$ не может быть расположено («умещено») в последовательность: как говорят, оно имеет большую «мощность».

З а м е ч а н и е. Понятие бесконечного множества можно было бы определить строго, сформулировав вначале определение конечного множества и объявив затем бесконечным любое множество, которое

не является конечным. Ранее было дано лишь описание *конечных множеств*, причем не вполне строгое. Представим еще один, довольно изящный, вариант описания понятия «конечное множество»:

1) множество, в котором всего один элемент, является по определению конечным;

2) объединение двух конечных множеств является конечным;

3) других конечных множеств нет.

Приведем пример часто встречающейся функции, обозначаемой $n!$ (читается: «эн факториал»):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Например, $1! = 1$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. По определению $0! = 1$.

В приложениях иногда встречаются очень большие натуральные числа. В этой связи полезно напомнить некоторые *наименования*: цифры в записи числа разбивают на классы, отделяя справа последовательно по три цифры. Первый класс — *единицы*, второй — *тысячи*, третий — *миллионы*, четвертый — *миллиарды*, пятый — *триллионы* и т.д. Например, число 1 306 215 000 читается: «один миллиард триста шесть миллионов двести пятнадцать тысяч».

Важно заметить, что в результате указанного построения системы $\mathbb{N}$ оказывается, что она существует и является единственной (с точностью до терминологических переобозначений). Иногда систему $\mathbb{N}$ называют еще *натуральным рядом*, имея в виду ее запись в виде последовательности $1, 2, \dots, n, \dots$. Употребляя этот термин, следует учитывать, что понятие «ряд» в математике имеет и совсем иной смысл.

Для математики является традиционной постановка вопроса об *обратной операции* по отношению к введенной. Так, определив операцию сложения в $\mathbb{N}$, каждой паре натуральных чисел a и b сопоставляют их сумму $c = a + b$. Пусть теперь задана пара произвольных натуральных чисел a и c . Существует ли такое натуральное число x , для которого $a + x = c$? Если да, то такое число x называют *разностью* чисел c и a : $x = c - a$, а операцию нахождения разности — *вычитанием*. Возникают традиционные вопросы:

1) существует ли разность для любых чисел c и a ;

2) если существует, то единственна ли она?

Ответ на первый из них: вообще говоря, нет. Например, при $c = 5$, $a = 3$ разность находится: $x = 5 - 3 = 2$ (так как $3 + 2 = 5$), но при $c = 2$, $a = 4$ соответствующего натурального числа не существует.

Ответ на второй вопрос — да, так как, предположив, что есть два таких числа x_1 и x_2 , для которых $x_1 = c - a$ и $x_2 = c - a$, находим $a + x_1 = a + x_2$, т.е. $x_1 = x_2$.

Совершенно аналогично можно рассмотреть вопрос о *делении* — операции, обратной умножению. Например, некоторые натуральные числа m делятся на 2 (т.е. существует такое натуральное число k , что $2k = m$) — их называют *четными*, другие (например, 3, 5) — не делятся на 2 — это *нечетные* числа, их общая формула $2k - 1$, где $k = 1, 2, \dots$.

Есть натуральные числа, которые делятся только на 1 и на себя. Их называют *простыми* (по определению 1 не является простым числом).

Аналоги операций вычитания и деления в окружающем человека мире встречаются очень часто. Поэтому тот факт, что они далеко не всегда выполнимы в рамках числовой системы $\mathbb{N}$, является серьезным основанием для того, чтобы *расширить* систему $\mathbb{N}$, пополнив ее элементами, которые могли бы служить математическими моделями соответствующих реалий.

2.2. МНОЖЕСТВО ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Для того чтобы воспользоваться числовой системой, на практике нередко приходится выбирать *начало отсчета*. Например, возраст человека принято отсчитывать от момента его рождения, температуру (по шкале Цельсия) — от ее состояния, когда тает лед, и т.д. Но при этом имеет содержательный смысл и может представлять интерес рассмотрение предшествующих состояний. Для их количественной характеристики системы натуральных чисел уже недостаточно. В принципе возможны два решения:

- а) построить совсем новую числовую систему, с помощью которой решались бы все упомянутые ранее и вновь возникающие задачи;
- б) расширить систему $\mathbb{N}$, пополнив ее новыми элементами, пригодными для описания предшествующих состояний, «долгов», отсчетов «в противоположном направлении» и т.п.

Второй вариант представляется явно более рациональным, поскольку с математической точки зрения все такие задачи сводятся к неограниченности выполнения операции вычитания. В этом смысле можно сказать, что в системе $\mathbb{N}$ явно обозначается резерв возможного усовершенствования.

Итак, добавим ко множеству символов $1, 2, \dots, n, \dots$, задающих систему $\mathbb{N}$, еще символы (называемые *отрицательными* целыми числами)

$$-1; -2; \dots; -n; \dots$$

а также специальный символ 0 (*нуль*) и назовем объединенную систему множеством *целых чисел* $\mathbb{Z}$.

Естественно, что устанавливается соответствие $n = -(-n)$.

Главное теперь — ввести в новой системе операции сложения, вычитания, умножения, которые должны быть неограниченно выполнимыми и приводящими к тому же результату в частном случае, когда они осуществляются для ранее введенных элементов $\mathbb{N}$. Здесь не будем описывать детально, как это делается, заметив только, что для этого обычно вводится понятие *модуля* целого числа и устанавливаются правила оперирования знаками «+» и «-» (несомненно, хорошо известные читателю).

О п р е д е л е н и е. *Модулем* (абсолютной величиной) целого числа a называется число, обозначаемое $|a|$, которое совпадает с a , если a положительное; совпадает с $(-a)$, если a отрицательное, и равно 0 , если $a = 0$.

Напомним для примера только некоторые правила оперирования знаками ($n, m \in \mathbb{N}$):

- $(-n) + (-m) = -(|-n| + |-m|) = -(n + m);$
- $n + (-n) = n - n = 0;$
- $nm = (-n)(-m);$
- $n(-m) = (-n)m = -|n||m| = -nm.$

Оказывается, что в результате проведения подобных теоретических построений (технически довольно громоздких) в системе целых чисел $\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения коммутативны, ассоциативны, а в сочетании — дистрибутивны. Принципиально важно, что *операция вычитания*, как обратная к сложению, теперь *однозначно выполнима без всяких ограничений*, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ существует такое $x \in \mathbb{Z}$, что $a + x = b$ (значит, $x = b - a$).

Учитывая обозначенную ранее логику рассуждений, вновь обратим свое внимание на постановку вопроса об операции, *обратной умножению*. Расширяя систему $\mathbb{N}$ до $\mathbb{Z}$, мы не стремились обеспечить ее выполнимость: по-прежнему, в отдельных случаях она выполнима (например, $(-6) : 3 = -2$, так как $3(-2) = -6$; $(-10) : (-2) = 5$), а в отдельных — нет; например, не существует целого числа x , которое удовлетворяло бы равенству $(-3)x = 2$.

Значит, и система $\mathbb{Z}$ имеет определенный резерв для расширения как с логико-математической точки зрения (возможность сделать операцию умножения обратимой), так и с прикладной (поскольку многие практические задачи требуют введения процедуры деления).

2.3. СИСТЕМА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим элементы вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$. Если число m делится на n в системе целых чисел, то каждый из таких элементов — просто результат выполнения операции, обратной умножению: если $nx = m$, то $x = \frac{m}{n}$. Если же такого $x \in \mathbb{Z}$ не существует, то $\frac{m}{n}$ — это новый символ, присоединяемый к системе $\mathbb{Z}$, который называется *рациональной дробью* с числителем m и знаменателем n . Пополнив систему $\mathbb{Z}$ всевозможными элементами указанного вида, мы получаем систему рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Ясно, что при строгом математическом построении системы $\mathbb{Q}$, приняв указанное расширение, предстоит проделать еще большую техническую работу по определению в $\mathbb{Q}$ уже введенных ранее операций сложения, вычитания, умножения и сравнения для целых чисел, причем так, чтобы не возникло противоречие с результатами их выполнения в $\mathbb{Z}$. Соответствующие правила хорошо известны:

- $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$;
- $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$;
- $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, если $a_1 b_2 < a_2 b_1$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$

(так как $\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 b_2} < 0$).

Главное, что таким образом удастся достичь: множество $\mathbb{Q}$ — это числовая система, структура которой характеризуется возможностью сравнения чисел между собой и неограниченного выполнения операций сложения, вычитания и умножения. То же самое можно было бы сказать и об операции деления, если бы не одно важное исключение: *делить на ноль нельзя*.

Деление на нуль оказывается запрещенной операцией во всех числовых системах (включая и обсуждаемые далее $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

Система $\mathbb{Q}$ оказывается *единственной*, обладающей указанными свойствами, однако это не исключает существования многих способов символического обозначения ее элементов.

Дроби вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, обычно называют *обыкновенными*. Одно и то же рациональное число может быть представлено многими обыкновенными дробями (например, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$).

Для дробей со знаменателями 10, 100, 1000 и т.д., называемых *десятичными*, часто используется специальная запись с применением арабских цифр 0, 1, ..., 9 в десятичной системе счисления. Например, число 15,273 представляет собой сумму следующих обыкновенных дробей:

$$1 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000}.$$

Однако не всякая обыкновенная дробь оказывается подобным образом представимой. Например, легко усмотреть, что $\frac{1}{6}$ лишь приближенно может быть описана десятичными дробями вида

$$0,1; 0,16; 0,166; 0,1666; 0,16666; \dots$$

Точность приближения возрастает с добавлением каждого нового знака после запятой, поэтому можно было бы сказать, что $\frac{1}{6}$ точно представима *бесконечной* десятичной дробью: $\frac{1}{6} = 0,16666\dots$. Однако при этом важно заметить, что бесконечная десятичная дробь — это уже какой-то новый объект, рассмотрение которого не предусматривалось процедурой расширения системы $\mathbb{Z}$ до системы $\mathbb{Q}$. Другими словами, произвольная бесконечная десятичная дробь может не оказаться рациональным числом (как оно и есть на самом деле).

Заметим также, что, выбирая представление рациональных чисел, можно менять и *систему счисления*. Например, число 4,5, записанное в десятичной системе счисления, можно представить в виде

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2},$$

т.е. в *двоичной системе* счисления записать так: 100,1. В зависимости от выбора системы счисления будут изменяться и правила,

по которым оформляется результат практических вычислений (таблицы сложения и умножения чисел). Например, в десятичной системе $1 + 1 = 2$, а в двоичной $1 + 1 = 10$. Для компьютеров более удобна двоичная система счисления, для человека — десятичная, но сам результат вычислений никоим образом от этого не зависит.

2.4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Система рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является основной системой, в рамках которой производятся практические арифметические вычисления. Даже если в вычислениях встречаются числа, не являющиеся рациональными (например, π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$), желание представить результат вычисления рациональным числом приводит к необходимости брать их приближенные рациональные значения.

Теоретически все арифметические операции с рациональными числами можно выполнить точно, но на практике это редко удается сделать в условиях сколько-нибудь сложных вычислений. Причин тому много. Вот некоторые из них:

- исходные данные для вычислений могут быть приближенными;
- использование десятичной системы счисления приводит к возникновению бесконечных десятичных дробей, которые приходится заменять конечными, отбрасывая младшие разряды;
- все вычислительные средства (компьютеры, калькуляторы и т. п.) имеют ограниченную разрядную сетку для представления чисел, делая процедуру округления во многих случаях неизбежной;
- поставленная задача вычисления может не требовать большой точности, ввиду чего проведение вычислений повышенной точности является излишне сложной процедурой (иногда — слишком дорогой, трудоемкой, требующей больших затрат времени и т. п.).

Приведем несколько простейших сведений, связанных с культурой приближенных вычислений. Прежде всего — о записи приближенных чисел. Вводится понятие *значащих цифр* в записи — это все верные цифры числа, кроме нулей, стоящих впереди числа. Например, запись 2,5 отличается от записи 2,50 тем, что в первом случае верны две цифры, а во втором — три. В числе 0,035 две значащие цифры, как и в числе $52 \cdot 10$ (его нельзя записать как 520, так как это означало бы, что в нем три значащие цифры).

На самом деле истинное значение числа может отличаться от указанных выше с учетом правил округления:

а) лишние цифры в младших разрядах отбрасываются, причем сохраняются только значащие цифры;

б) если первая отбрасываемая цифра больше 4, то последняя сохраняемая увеличивается на 1;

в) если отбрасывается только одна цифра 5, то последняя сохраняемая цифра обычно берется четной.

Главная проблема в приближенных вычислениях — оценить *погрешность результата*. Различают *абсолютную* погрешность $\Delta = |x - a|$, где x — точное число, а a — его приближенное значение, и *относительную* погрешность $\delta = \frac{\Delta}{a}$, которую часто выражают в процентах. Обычно эти погрешности стараются оценить, т.е. указать их предельные (самые большие из возможных) значения, или (ради упрощения оценок) числа, несколько большие их по величине.

На практике бывает важно получить ту и другую оценку, поскольку они по-разному характеризуют результат приближенных вычислений. Например, пусть в результате вычисления некоторой площади получена оценка $\Delta \leq 2$ (м²). Такие вычисления можно признать очень точными, если, например, речь идет о площади земельного участка 400 м² ($\delta = 0,5\%$), или же довольно грубыми, если, например, измерялась площадь комнаты в 16 м² ($\delta = 12,5\%$).

Для простейших операций (сложение двух приближенных чисел, умножение, деление и т.д.) существуют относительно простые правила оценки погрешности. Их легко найти в математических справочниках. Однако на практике их применяют не очень часто, поскольку современные вычисления редко сводятся к комбинациям из небольшого числа указанных операций и обычно производят в автоматическом режиме (без проведения промежуточных округлений), а наиболее значимые погрешности оказываются связанными с использованием приближенных формул или же имеют нематематическую природу (например, связаны с погрешностями первичных инструментальных измерений значений переменных). В целом оценка погрешности вычислений оказывается одной из самых сложных задач из многих разделов прикладной математики, а при решении таких задач приходится использовать самые мощные математические средства.

При проведении простейших вычислений с помощью калькулятора можно рекомендовать совсем простое практическое правило: при выполнении арифметических операций с точностью до n верных

значащих цифр достаточно округлить их компоненты до $(n + 1)$ верной значащей цифры, а в особенно сложных комбинациях таких вычислений — до $(n + 2)$ верных значащих цифр.

Это правило позволяет практически оценить как точность полученных результатов вычислений при неточных исходных данных, так и допустимую величину предельной погрешности исходных данных при требуемой точности результата вычислений.

Из всего существующего разнообразия вычислительных средств (таблицы, графики, номограммы, счетные линейки, калькуляторы, компьютеры и др.) вне конкуренции оказались те, которые можно отнести к категории электронных вычислительных машин (ЭВМ). Описание методов работы на них выходит за рамки данного учебного курса. Заметим, однако, что использование простейших калькуляторов в чисто техническом плане не вызывает у пользователей больших затруднений и может быть освоено непосредственно по заводским инструкциям.

2.5. СИСТЕМА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Мы видели, что проблема расширения числовой системы возникала каждый раз в связи с тем, что некоторая операция, полезная с точки зрения решения определенных практических задач, не выполнялась в данной системе. Оказывается, что и система рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является в этом смысле неполной по отношению к нескольким задачам. Вот только некоторые из них.

1. В системе $\mathbb{Q}$ легко ввести операцию возведения числа в степень n , где $n \in \mathbb{N}$: $x^1 = x$; $x^2 = x \cdot x$; $x^3 = x \cdot x \cdot x$, Но обратная операция (называемая *извлечением корня*) выполняется не всегда; как известно, например, не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, т.е. во множестве $\mathbb{Q}$ нельзя решить уравнение $x^2 = 2$.

2. Для наглядного изображения системы $\mathbb{Q}$ часто используется числовая ось, т.е. прямая, на которой отмечено начало отсчета O , положительное направление и выбран масштаб (отмечен единичный отрезок). Каждому рациональному числу r соответствует единственная точка на числовой оси (рис. 11). Но такое соответствие не является взаимно-однозначным: образно говоря, точек на числовой оси больше, чем чисел в $\mathbb{Q}$. В результате оказывается,



Рис. 11

что, располагая лишь рациональными числами, невозможно решить задачу измерения отрезков: длину не каждого взятого наудачу отрезка OA можно выразить рациональным числом (например, гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, равным 1). Это явно не соответствует здравому смыслу.

3. Возьмем последовательность рациональных чисел, в которой каждое последующее число больше предыдущего: $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ (т.е. строго монотонно *возрастающую*). Пусть, кроме того, она ограничена, т.е. существует такое число M , которое больше всех чисел r_n ($n = 1, 2, \dots$). Пример нескольких членов такой последовательности:

3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415;

В качестве M можно взять число 4. (Закон построения членов этой последовательности мы не указали точно, но будем считать, что в зависимости от n меняется только соответствующий десятичный знак после запятой.) Интуитивно ясно, что члены таких последовательностей неограниченно приближаются к некоторому числу (иначе говоря, стремятся к определенному *пределу*, или *сходятся*). Однако, если располагать только системой $\mathbb{Q}$, такое утверждение будет неверным. Например, последовательность, несколько членов которой мы выписали, могла бы сходить к числу π , которое, как можно доказать, не только не является рациональным, но даже и не может быть представлено в виде результата операции извлечения корня из некоторого рационального числа.

Последнее замечание об известном читателю числе π показывает, в частности, что задача полноценного расширения системы $\mathbb{Q}$ не может быть решена с помощью операции, обратной возведению рационального числа в натуральную степень. Нужны более сложные конструкции. Их известно несколько, причем все они эквивалентны в том, что приводят к построению одной и той же *системы действительных (вещественных) чисел* $\mathbb{R}$.

Идеи двух таких конструкций уже частично намечены в задачах 2 и 3. Первая из них может быть формализована с помощью так называемых сечений во множестве $\mathbb{Q}$, т.е. разбиений $\mathbb{Q}$ на два класса («левый» и «правый»), суть которых — в указании «разделяющего числа»: если такового нет среди рациональных, то «сечение» объявляется *иррациональным* числом и пополняет $\mathbb{Q}$. Вторая трактует действительные числа как всевозможные монотонно возрастающие и ограниченные последовательности рациональных чисел. В виде вариации последней идеи можно рассматривать действительные

числа как бесконечные десятичные дроби вида $A, a_1 a_2 \dots$, где $A \in \mathbb{Z}$ и $a_1, a_2, \dots$ — цифры (из набора $0, 1, \dots, 9$). По сути, бесконечные десятичные дроби являются частными случаями монотонных последовательностей рациональных чисел. Можно показать, что любое рациональное число представимо либо конечной десятичной дробью (ее можно превратить в бесконечную, продолжив неограниченно нулями; например, $0,5 = 0,5000 \dots$), либо бесконечной *периодической* дробью, у которой конкретный набор цифр последовательно бесконечно много раз повторяется (например, $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$).

А бесконечные десятичные непериодические дроби — это иррациональные числа.

Принятие любого упомянутого способа определения действительных чисел приводит к непростой задаче: для вновь введенных чисел необходимо определить все арифметические операции, причем так, что результат их выполнения в частном случае, когда числа оказываются рациональными, будет тем же самым, что и в $\mathbb{Q}$. Мы не будем анализировать, как можно складывать или, скажем, умножать «сечения», последовательности или бесконечные десятичные дроби. Нам важно отметить, что все это удастся сделать математически безупречно. На практике, оперируя иррациональными числами, всегда можно ограничиться приближенными значениями для результата операции, который возникает, если оперировать рациональным приближением таких чисел. При этом может быть достигнута любая требуемая точность. Например, в большинстве практических вычислений можно считать, что $\sqrt{2} \approx 1,414$; $\sqrt{3} \approx 1,732$; $\pi \approx 3,1416$; $e \approx 2,7183$ (о замечательном иррациональном числе e пойдет речь далее).

Предположим теперь, что система $\mathbb{R}$ построена одним из вариантов расширения $\mathbb{Q}$. В ней можно неограниченно извлекать корни их неотрицательных рациональных чисел, для нее можно находить пределы монотонно возрастающих и ограниченных последовательностей рациональных чисел и т.д. Но выполнимы ли такие операции для любых действительных чисел? Если бы ответ оказался отрицательным, то это означало бы, что процедуру расширения следует продолжить, так как $\mathbb{R}$ оказалась вновь неполной по отношению к упомянутым операциям. И тогда возник бы неприятный вопрос: а существует ли конец подобным расширениям?

Но ответ оказывается положительным: система действительных чисел $\mathbb{R}$ является *полной* (иногда говорят — *замкнутой* или *непрерывной*). Этот факт можно выразить в виде теоремы, допускающей несколько эквивалентных формулировок. Вот одна из них.

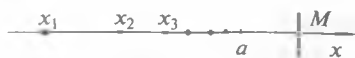


Рис. 12

Теорема. Свойство непрерывности множества $\mathbb{R}$. Для всякой монотонно возрастающей и ограниченной последовательности (x_n) действительных чисел существует пре-

дел, т.е. такое действительное число a , что разность $a - x_n$ можно сделать сколь угодно малой, увеличивая значения n .

Геометрически этот факт означает, что на числовой оси найдется точка a , к которой точки, соответствующие членам последовательности, неограниченно приближаются при возрастании номеров: $n = 1, 2, \dots$ (рис. 12).

Здесь x_n — действительные числа; $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ (т.е. последовательность монотонно возрастает); M — число, обладающее свойством: для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $x_n \leq M$ (т.е. последовательность ограничена *сверху*; заметим, что *снизу* она тоже ограничена любым числом, не превосходящим x_1).

Символически существование предела у последовательности x_n обозначают записью $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (читается: «предел x_n при n , стремящемся к бесконечности, равен a »).

Свойство полноты множества $\mathbb{R}$ отражает интуитивное представление человека о непрерывности прямой: на ней нет «пробелов» между точками, т.е. «рассечение» ее в любом месте приходится на некоторую точку. При этом множество точек числовой оси взаимнооднозначно соответствует множеству $\mathbb{R}$ (возникает изоморфизм, см. подразд. 1.5).

Оказывается, что именно свойство полноты (непрерывности) множества $\mathbb{R}$ позволяет ввести в рассмотрение операции *дифференцирования* и *интегрирования* функций действительного переменного, которые дают возможность анализировать математическими средствами разнообразные *процессы*.

З а м е ч а н и е. Существует принципиально иной способ построения числовых систем $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — аксиоматический. Он имеет ряд преимуществ, в основном теоретического характера, тем более что исходную систему $\mathbb{N}$ все равно приходится вводить на основе аксиоматики. Однако с точки зрения прикладного использования числовых систем он неудобен, поскольку логика их использования в моделях реальных объектов и процессов оказывается глубоко скрытой за формальными математическими конструкциями.

В ближайших подразделах будут рассмотрены некоторые важные функции, определенные на множестве $\mathbb{R}$ (или каких-то его подмножествах). Одна из таких функций заслуживает первоочередного рас-

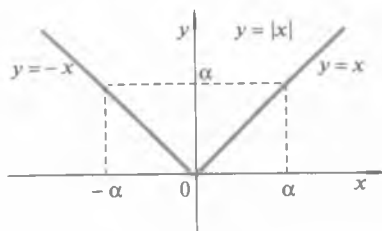


Рис. 13

смотрения, поскольку участвует в описании многих фундаментальных математических понятий. Речь идет о $|x|$ — *модуле (абсолютной величине)* действительного числа x (мы уже упоминали об аналогичном понятии в связи с другими числовыми системами).

По определению

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График функции $y = |x|$ изображен на рис. 13.

Укажем некоторые свойства модуля, очевидные из определения:

$$|x| \geq 0, \quad -|x| \leq x \leq |x|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Часто встречаются простейшие неравенства с модулями. О них уже упоминалось в связи с некоторыми квадратическими неравенствами.

Пример 1. Неравенство $|x| \leq \alpha$, как ясно из определения, эквивалентно двойному неравенству $-\alpha \leq x \leq \alpha$ (рис. 14, а).

Здесь $\alpha > 0$. Аналогично, неравенство $|x| < \alpha$ эквивалентно неравенству $-\alpha < x < \alpha$.

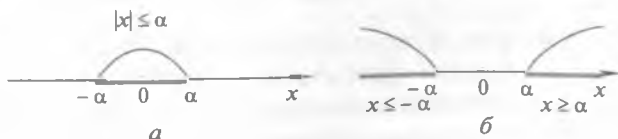


Рис. 14

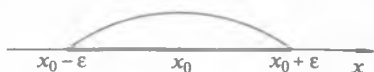


Рис. 15

Пример 2. Множество решений неравенства $|x| \geq \alpha$ является суммой множеств, заданных решениями неравенств $x \geq \alpha$ и $x \leq -\alpha$ (рис. 14, б), так как это дополнительное (до $\mathbb{R}$) множество к совокупности решений неравенства $|x| < \alpha$.

Аналогично $|x| > \alpha$ при $x > \alpha$ или $x < -\alpha$ ($\alpha > 0$).

Из подмножеств множества $\mathbb{R}$, на которых часто определяются функции действительного переменного, следует указать прежде всего *промежутки*, разновидностями которых являются:

- *отрезок* $[a, b]$ — множество x , удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$;
- *интервал* (a, b) — множество x , удовлетворяющих неравенству $a < x < b$;
- *полуинтервалы* $(a, b]$ или $[a, b)$ соответственно: $a < x \leq b$ или $a \leq x < b$;
- *лучи* $[a, \infty)$ или $(-\infty, a]$ — соответственно $x \geq a$ или $x \leq a$;
- *вся числовая прямая* $(-\infty, \infty)$ — множество всех $x \in \mathbb{R}$.

Как ясно из предыдущего, промежутки часто задаются неравенствами с модулем. Специального внимания заслуживают интервалы вида $|x - x_0| < \epsilon$, т.е. $-\epsilon < x - x_0 < \epsilon$ или $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ (рис. 15).

Их называют *ϵ -окрестностями* точки x_0 . Число $\epsilon > 0$ может быть любым, но чаще всего его считают малым, поскольку многие свойства функций, определенных в окрестности некоторой точки x_0 , проявляются только вблизи точки x_0 . Вообще *окрестностью* данной точки a называют любой интервал, содержащий a , и, например, ее δ -окрестность — это частный случай окрестности, в пределах которой произвольная точка x может отличаться от a не более чем на δ : $|x - a| < \delta$.

*2.5

СИСТЕМА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Как было показано, система действительных чисел $\mathbb{R}$ оказывается множеством, наделенным чрезвычайно богатой структурой: определен весь спектр алгебраических операций; задана структура порядка, позволяющая сравнить между собой любые два числа; выполняется свойство полноты (не имеющее места в $\mathbb{Q}$), позволяющее рассматри-

вать предельные переходы. По сравнению с другими множествами, которыми оперирует математика, это богатство уникально. Поэтому именно отображения различных множеств в $\mathbb{R}$ являются важнейшим средством математического моделирования.

И все же $\mathbb{R}$ — это не конечный этап развития теории числовых систем. Обратим внимание на тот факт, что в $\mathbb{R}$ невозможно извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В принципе это еще не основание для того, чтобы ставить вопрос о расширении $\mathbb{R}$, поскольку главный смысл любого расширения — это возможность решать некоторые новые важные практические задачи, а не формально-логические упражнения. Однако оказалось, что если ввести в рассмотрение особое число i (не являющееся действительным числом и называемое *мнимой единицей*), заданное равенством $i^2 = -1$, а затем рассмотреть всевозможные комбинации вида $x + iy$, где x и y — любые действительные числа, то возникает весьма полезная в практических приложениях числовая система $\mathbb{C}$, называемая *системой комплексных чисел*.

В комбинации $z = x + iy$ число x называется *действительной частью* комплексного числа z , а y — *мнимой частью* z .

Поскольку при $y = 0$ комбинация $z = x + iy$ превращается в действительное число x , операции с комплексными числами z должны быть определены так, чтобы не возникало противоречия со структурой в $\mathbb{R}$. Это соблюдается, если положить для $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, по определению:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

(легко видеть, что закон умножения напоминает обычное алгебраическое произведение двучленов с учетом равенства $i^2 = -1$).

Заметим, что вполне можно обойтись и без всякой «мнимости» при определении комплексных чисел. Ведь речь идет просто об *упорядоченных парах* действительных чисел (x, y) , причем паре вида $(x, 0)$ соответствует действительное число x . А операции сложения и умножения с такими парами легко ввести по правилам, соответствующим приведенным ранее равенствам:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Еще один вариант — считать комплексным числом любую *точку* координатной плоскости, у которой $0x$ — действительная ось, а $0y$ — мнимая, или *вектор*, определенный направленным отрезком $\overrightarrow{0z}$.

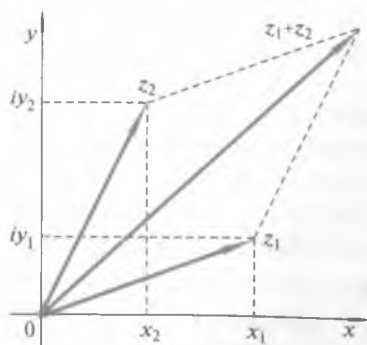


Рис. 16

Тогда правило сложения комплексных чисел соответствует правилу сложения векторов (правилу параллелограмма) (рис. 16). Векторы будут рассмотрены в гл. 5.

Каждое комплексное число $z \neq 0$ можно характеризовать его *модулем*:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (расстоянием от точки 0 до точки z) и аргументом φ , т. е. углом между вектором $0 \rightarrow z$ и действительной осью (рис. 17). При $z = 0$ аргумент не определяется, а $|z| = 0$.

Если допускать к рассмотрению

значения φ , удовлетворяющие неравенству $-\pi < \varphi \leq \pi$, то речь идет о главном значении аргумента, который обозначается $\arg z$. Добавление к аргументу любого слагаемого вида $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, не влияет на положение точки z . Поэтому в связи с данным комплексным числом z иногда рассматривают $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$).

Например, если $z = 1$, то $|1| = 1$, $\arg 1 = 0$;

если $z = i$, то $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$;

если $z = -1$, то $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$;

если $z = 1 + i$, то $|1 + i| = \sqrt{2}$, $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$;

если $z = -1 - i$, то $|-1 - i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4}$.

Используя понятие модуля, аргумента и очевидные равенства

$x = |z| \cdot \cos \varphi$ и $y = |z| \cdot \sin \varphi$, комплексное число можно записать в *тригонометрической форме*: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, которая оказывается особенно удобной при перемножении чисел. Как легко показать, используя свойства тригонометрических функций, при умножении двух чисел z_1 и z_2 их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

и $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

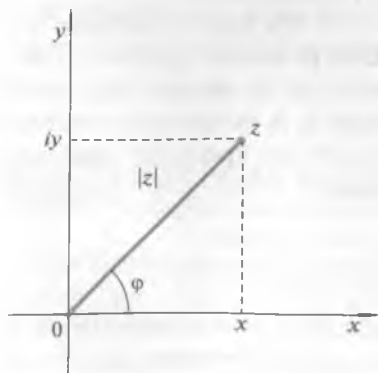


Рис. 17

Операции вычитания и деления комплексных чисел можно определить как обратные к сложению и умножению. Практически деление можно выполнить, например, так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

(мы умножили числитель и знаменатель дроби на число $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$, сопряженное к z_2 , имея в виду, что таким способом вычисление упрощается, поскольку $z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_2|^2$).

Важно, однако, заметить, что, расширяя систему $\mathbb{R}$ до $\mathbb{C}$, мы не только обретаем новые возможности для операций с числами, но и утрачиваем кое-что важное: система комплексных чисел $\mathbb{C}$ не обладает структурой порядка. Например, вопрос о том, какое из чисел i или $1 + i$ больше, не имеет смысла. А вот их модули сравнить можно: $|i + 1| > |i|$.

Полезность введения комплексных чисел и соответствующих функций во всей полноте выясняется при рассмотрении достаточно сложных математических теорий и прикладных построений. Мы ограничимся пока указанием на простейший факт: во множестве $\mathbb{C}$ любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет решение.

В самом деле, если дискриминант такого уравнения $D = b^2 - 4ac$ положителен ($D > 0$), то квадратное уравнение имеет два действительных решения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

При $D = 0$ оба корня совпадают: $x_1 = x_2$ (иногда говорят, что есть один действительный *кратный* корень).

При $D < 0$ действительных корней нет, но есть два *комплексных* корня:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

3.1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Среди всевозможных функций, которые рассматриваются в математике, важнейшую роль играют числовые функции действительного переменного, т.е. функции, определенные на некоторых множествах действительных чисел и имеющие значения, принадлежащие $\mathbb{R}$. Для их исследования удастся построить весьма эффективный аппарат, первоисточником которого является операция предельного перехода, которую удастся ввести благодаря наличию свойства непрерывности $\mathbb{R}$. Рассмотрение этой операции начнем с частного случая указанных функций — числовых последовательностей.

Пусть задана числовая последовательность $(x_n), n = 1, 2, \dots$. Геометрически ей соответствует множество точек на числовой оси.

Будем неограниченно увеличивать номера членов последовательности, т.е. выбирать значения n , большие любого наперед заданного числа N (для простоты его также можно считать натуральным), т.е. для любого фиксированного номера N будем выбирать значения n , которые подчинены единственному условию: $n > N$. Любой вариант реализации такого процесса выбора будем символически обозначать: $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь, как изменяются значения x_n при $n \rightarrow \infty$. Возможен случай, когда значения x_n неограниченно приближаются к некоторому числу a , т.е. какую бы малую окрестность числа a мы ни взяли, все значения x_n окажутся в этой окрестности для всех достаточно больших номеров n . В этом случае говорят, что последовательность x_n имеет своим пределом число a (или, что то же, сходится к a), и записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Мы видели, что для некоторых последовательностей предел гарантированно существует. Во всяком случае, для монотонно возрастающих и одновременно ограниченных — это свойство непрерывности $\mathbb{R}$.

Ясно, что аналогичным свойством обладает и монотонно убывающая ограниченная последовательность (умножив все ее члены на (-1) , мы превратим ее в возрастающую, и становится понятным, что если у последней предел a , то у исходной последовательности он будет равен $(-a)$). Но для произвольной последовательности вопрос о существовании предела является открытым. Обычно, рассматривая последовательность, его задают в первую очередь.

Пример 1. Последовательность $1, 4, 9, 16, \dots$, т.е. (n^2) , где $n = 1, 2, \dots$, предела не имеет, так как какое бы конкретное число a мы ни указали, члены последовательности, начиная с некоторого номера, превзойдут число a и при дальнейшем увеличении номеров n будут неограниченно удаляться от a , возрастая по величине. В подобных случаях говорят, что последовательность является бесконечно большой, или что предел ее равен ∞ . В данном случае допускается запись: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

Пример 2. Последовательность $-1, 1, -1, 1, \dots$, т.е. $(-1)^n$, где $n = 1, 2, \dots$, тоже не имеет предела, так как, располагаясь лишь величиной номеров n , ее члены невозможно уместить в фиксированном интервале, если длина его меньше 2.

Пример 3. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$, где $n = 1, 2, \dots$, имеет пределом число 0, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Действительно, зададим произвольную ε -окрестность точки $x = 0$, т.е. интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Ясно, что всегда можно выбрать такой большой номер N , что $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Но тогда и для всех номеров, удовлетворяющих условию $n > N$, будет выполняться неравенство $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, поскольку с возрастанием номеров члены этой последовательности убывают. Значит, при $n > N$ все они окажутся в выбранной ε -окрестности.

Случай, когда последовательность имеет предел, равный нулю, обычно выделяют как особый и говорят, что это *бесконечно малая* последовательность.

Пример 4. Рассмотрим последовательность $\frac{n-1}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Заметим, что $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$, и, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$, делаем вывод:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$. На этом примере нетрудно заметить общую закономерность: если последовательность имеет пределом число a , то она отличается от a на бесконечно малую величину. Верно и обратное утверждение.

С формальной математической точки зрения приведенное выше определение предела последовательности еще не вполне строгое, поскольку слова типа «неограниченно увеличиваем n » или «члены последовательности приближаются ...» привносят некий физический смысл в чисто математические конструкции. Конечно, он не повредит тому, кто заинтересован в первую очередь в их практических приложениях, тем более что поможет в понимании смысла и более точной формулировки.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности x_n , $n = 1, 2, \dots$ (запись: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Геометрический смысл формулировки: все точки последовательности, сходящейся к a , оказываются в любой наперед заданной ε -окрестности точки a , если их номера больше определенного номера N , выбор которого зависит от ε (рис. 18).

При вычислении пределов могут помочь их арифметические свойства. Пусть для последовательностей x_n и y_n существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда существуют пределы для суммы (разности), произведения и частного этих последовательностей, и справедливы равенства:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ (если $b \neq 0$).

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из интуитивных соображений (ясно, например, что если x_n и y_n будут отличаться сколь угодно мало, соответственно от a и b , то это же верно и для произведения $x_n y_n$ по отношению к числу ab). Строгое доказательство

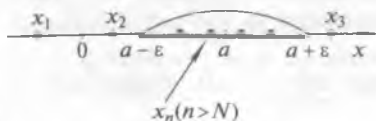


Рис. 18

вытекает из определения предела. Например, рассмотрим случай суммы:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ можно гарантировать, взяв $n > N_1$ (в силу условия $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$). Аналогично $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_2$. Поэтому, взяв $n > N_3$, где N_3 — наибольшее из чисел N_1 и N_2 , получим

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Однако воспользоваться арифметическими свойствами пределов удастся далеко не всегда. Может случиться, что нет предела у одной или даже обеих последовательностей x_n и y_n , но для их арифметической операции предел существует. Например, вполне возможно, что при $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ найдется предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$, как, например, при $x_n = n^2 + 1$ и $y_n = \frac{3}{n^2}$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (n^2 + 1) \frac{3}{n^2} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n^2} \right) = 3.$$

Аналогично может существовать (или не существовать) предел отношения двух бесконечно малых последовательностей (в этом случае применять арифметические свойства пределов не позволяет ограничение $b \neq 0$). Это видно на следующих примерах: последовательности $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $z_n = \frac{1}{n+1}$ бесконечно малые при $n \rightarrow \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{z_n} = 1$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ не существует.

Во всех подобных случаях говорят о *неопределенностях*, которые стремятся раскрыть, т. е. вычислить соответствующие пределы, если они существуют, или доказать их «несуществование». Есть несколько основных типов таких неопределенностей, которые символически обозначают: $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (0^0) , (1^∞) , (∞^0) . Такие записи не имеют арифметического смысла и, конечно, не обозначают какие-то числа. В них указано лишь предельное поведение соответствующих компонентов действий с функциями, что тоже важно, поскольку для неопределенностей разных типов существуют различные приемы их раскрытия. Например, если в числителе и знаменателе дроби стоят

многочлены относительно n , то при вычислении ее предела при $n \rightarrow \infty$ полезно поделить числитель и знаменатель на старшую степень n , присутствующую в многочленах:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n^2 + 1}{1 - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3} - 1} = -1.$$

Приведем еще один важный пример, связанный с неопределенностью типа (1^∞) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Вначале рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Она монотонно убывающая, так как каждый следующий ее член меньше предыдущего: $x_n < x_{n-1}$ для $n = 2, 3, \dots$. Действительно, рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{x_{n-1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n n^{n+1}}{(n-1)^n (n+1)^{n+1}} = \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Теперь замечаем, что при $y > 0$ и натуральном m $(1+y)^m > 1 + my$ (если $(1+y)$ умножить на себя m раз, то кроме слагаемых $1 + my$ в произведении будут еще положительные слагаемые).

Поэтому, взяв $m = n + 1$ и $y = \frac{1}{n^2-1}$, для дроби $\frac{x_{n-1}}{x_n}$ получим неравенство

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} > \left[1 + (n+1) \frac{1}{n^2-1}\right] \frac{n-1}{n} = 1, \text{ т.е. } x_{n-1} > x_n.$$

Поскольку все x_n положительны, последовательность (x_n) ограничена: снизу, например, нулем, а сверху — числом $x_1 = 2^2 = 4$. Значит, ее предел существует — это некоторое число, лежащее на интервале $(0, 4)$. Оказалось, что это число иррациональное, его обозначили буквой e . Приближенные вычисления, которые можно выполнить, подсчитывая x_n для достаточно больших n , показали, что $e \approx 2,71828$.

Учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ и

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

окончательно получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Оказалось, что число e обладает многими замечательными свойствами, которые будут рассмотрены далее. Поэтому и указанный предел иногда называют замечательным.

3.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Рассматривая ее значения для x , принадлежащих δ -окрестности этой точки (т.е. $|x - x_0| < \delta$ или $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$), можно следить за тем, как они изменяются, если δ неограниченно уменьшается и, значит, x неограниченно приближается к x_0 . Возможно, что при этом $f(x)$ неограниченно приближается к некоторому числу A . В таких случаях говорят, что $f(x)$ *имеет предел, равный A , при $x \rightarrow x_0$* , и записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Точная математическая формулировка такова.

О п р е д е л е н и е. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ су-

ществует число $\delta > 0$, такое, что для всех x (кроме, возможно, $x = x_0$) из условия $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Смысл определения: все значения функции $f(x)$ оказываются в любой, наперед заданной ε -окрестности точки A , если значения x берутся из достаточно малой δ -окрестности точки x_0 , выбор которой зависит от ε . Или, другими словами, можно гарантировать любую близость значений функции $f(x)$ к числу A , если ограничиваться рассмотрением только значений x , достаточно близких к x_0 .

Сама точка x_0 при этом исключается из рассмотрения — это важное условие, позволяющее исследовать предельное поведение функции при $x \rightarrow x_0$ даже в тех случаях, когда функция не определена в x_0 .

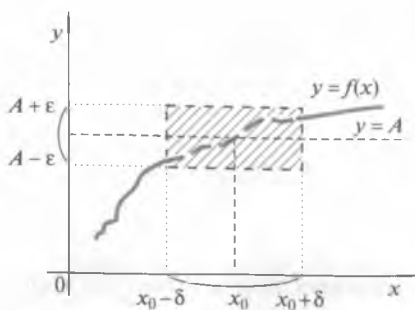


Рис. 19

Геометрический смысл равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ поясняет рис. 19: график функции оказывается в любой сколь угодно узкой ε -полосе прямой $y = A$, если x близко к x_0 .

Вместо записи $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ иногда пишут: $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.

Пример 1. Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$. Из свойств чисел ясно, что если x приближается к 2, то x^2 приближается к 4, т.е. указанный предел существует и равен 4. Но для строго формального доказательства следует убедиться, что неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$ будет гарантировано для всех x из некоторой δ -окрестности точки x_0 за счет малости δ .

Имеем: $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| < \delta |x + 2|$, если брать $|x - 2| < \delta$. Поскольку выбор $\delta > 0$ в нашем распоряжении, договоримся в любом случае выбирать $\delta < 1$. Тогда $|x + 2| < 5$, так как $2 - \delta < x < 2 + \delta$, и, значит, $|x^2 - 4| < 5\delta$. Ясно, что, выбирая $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$, мы гарантируем требуемое неравенство: $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Пример 2. Функция $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ определена для всех $x \neq 1$. Но $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ рассматривать можно, поскольку предельная точка из рассмотрения исключается. Если $x \neq 1$, то дробь y можно сократить на $(x - 1)$, т.е. рассматриваемый предел будет совпадать с $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$.

Пример 3. Первый вопрос, который возникает при рассмотрении предела функции, — существует ли он?

Рассмотрим, например, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$. Указанная функция определена при $x \neq 0$, что не является препятствием для рассмотрения предела. Если брать только $x > 0$, то $|x| = x$ и указанная дробь равна 1. Но если $x < 0$, то $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Поэтому в любой сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$ найдутся значения аргумента, равные 1 и равные

—1, т.е. за счет малости окрестности $x = 0$ невозможно добиться неограниченного приближения данной функции к определенному числу. Вывод: указанный предел не существует.

Рассмотрение этого предела наводит на мысль о возможном обобщении понятия предела: если рассматривать только половины δ -окрестности предельной точки (левую и правую), то пределы оказались бы существующими. Такие пределы называют *левосторонним* и *правосторонним* и обозначают, соответственно, символами $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = B$. Односторонние пределы могут оказаться существующими даже в случае, когда предел функции в точке не существует.

В нашем примере $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ не существует, но $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1$ и

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Понятно, что к данной точке x_0 можно приближаться и другими способами, например по некоторой последовательности точек $x_n \rightarrow x_0$. Тогда возникает соответствующая последовательность точек $(f(x_n))$, у которой может существовать (или не существовать) предел. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ существует в описанном выше смысле, то для любой последовательности точек $x_n \rightarrow x_0$ выполняется $f(x_n) \rightarrow A$. Но если, например, оказалось, что для двух различных последовательностей $x_n \rightarrow x_0$ и $x'_n \rightarrow x_0$ выполняются $f(x_n) \rightarrow A$ и $f(x'_n) \rightarrow B$, где $A \neq B$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ заведомо не существует, поскольку предел обладает свойством *единственности*: если он существует, то только один. Это свойство очевидно из определения предела, поскольку для двух различных чисел A и B можно выбрать непересекающиеся ε -окрестности, и поэтому значения однозначной функции $f(x)$ не могут оказаться в них одновременно, что должно было бы произойти для x , достаточно близких к x_0 , если бы оба числа A и B были пределами $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

По аналогии с определением предела последовательности можно рассматривать и пределы функции на бесконечности, различая случаи $+\infty$ и $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = C$.

Символ ∞ обычно отождествляют с $(+\infty)$ или, если это не приводит к противоречию, как объединенный знак для $\pm\infty$. Для таких пределов нахождение значений функции в любой ε -окрестности данной точки гарантируется за счет выбора достаточно больших по модулю значений x , т.е. для всех $x > M$ (в случае предела при $x \rightarrow +\infty$) или $x < -M$ ($M > 0$) — при $x \rightarrow -\infty$.

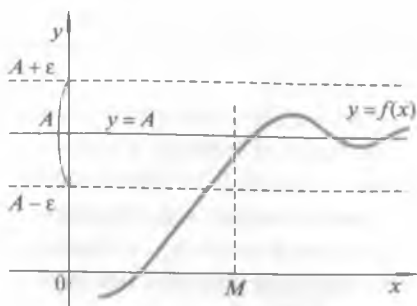


Рис. 20

Геометрически равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ означает, что график функции $y = f(x)$ оказывается в любой сколь угодно узкой ε -полосе прямой $y = A$, если рассматривать достаточно большие значения x (рис. 20). В таких случаях говорят, что график $y = f(x)$ *асимптотически* приближается к прямой $y = A$ при $x \rightarrow \infty$.

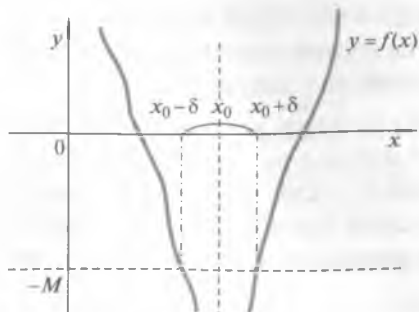
Среди всевозможных случаев, когда предел функции не существует, выделяют случай *бесконечно больших функций*. Это функции, значения которых, взятые по модулю, оказываются больше любого, наперед заданного числа при $x \rightarrow x_0$ (или $x \rightarrow \pm\infty$). Для обозначения этих случаев используются символы $\pm\infty$.

Например, запись $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ означает, что для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $x \neq x_0$ при условии $|x - x_0| < \delta$ будет выполняться неравенство $f(x) < -M$ (рис. 21).

Среди всевозможных функций, имеющих в данной точке x_0 определенный предел, выделяют *бесконечно малые* (при $x \rightarrow x_0$) *функции*. Это функции, обладающие свойством $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Аналогично при $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$. Легко видеть, что $f(x)$ — *бесконечно большая функция* при $x \rightarrow x_0$, если (и только если) $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая

при $x \rightarrow x_0$.



При вычислении пределов функций могут использоваться их арифметические свойства, совершенно аналогичные тем, что перечислялись для пределов последовательностей. Но наиболь-

Рис. 21

ший интерес представляют неопределенности уже известных читателю типов: $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$ и т. д.

3.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Из предыдущего материала легко усмотреть, что понятие предела функции полезно использовать при исследовании ее поведения при приближении к некоторой фиксированной точке или на бесконечности.

Если, например, обнаруживается, что функция $y = f(x)$ оказывается бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$ (или при одностороннем приближении $x \rightarrow x_0 + 0$; $x \rightarrow x_0 - 0$), то этот факт весьма существенно характеризует ее поведение вблизи x_0 . На рис. 22—24 изображены некоторые типичные случаи.

Во всех подобных случаях говорят, что вертикальная прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Определение. Некоторая прямая называется *асимптотой* графика функции, если расстояние между точкой P этого графика и данной прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки P по плоскости от начала координат.

Мы видели, что возможно существование и *горизонтальных асимптот*, уравнение которых $y = A$. Такие асимптоты возможны, если существует хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, причем асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ могут быть разными.

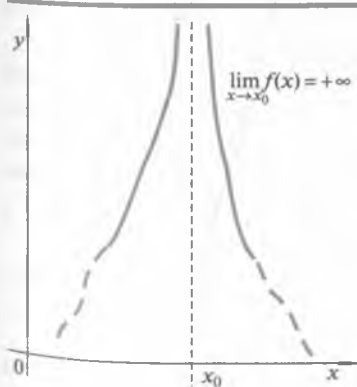


Рис. 22

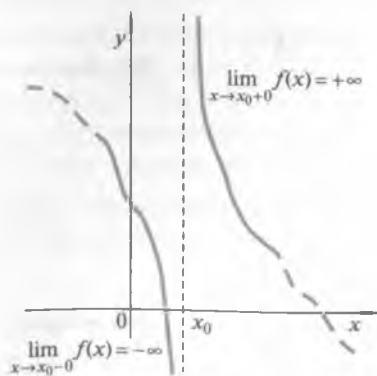


Рис. 23

Наконец, асимптотой может оказаться *наклонная* прямая, уравнение которой $y = kx + b$. Поскольку вычисленная для одних и тех же значений x разность значений y для точек прямой и графика $y = f(x)$ должна стремиться к нулю при $x \rightarrow \infty$ (по определению асимптоты), имеем: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$. Если выражение в квадратных скобках поделить на x , то предел тем более будет равен нулю, т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$, или, учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$, делаем вывод, что если наклонная асимптота существует, то ее угловой коэффициент можно найти по формуле

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Затем легко найти и свободный член b :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Заметим, что при исследовании поведения функции при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ вовсе не обязательно сравнивать ее график с некоторой прямой: сравнение легко можно производить с любой известной кривой. Например, поведение функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$ вблизи точки $x = 0$ определяется членом $\frac{1}{x}$; $x = 0$ — вертикальная асимптота ее графика, который напоминает график обратно пропорциональной зависимости $y = \frac{1}{x}$. Однако при больших $|x|$ главным оказывается

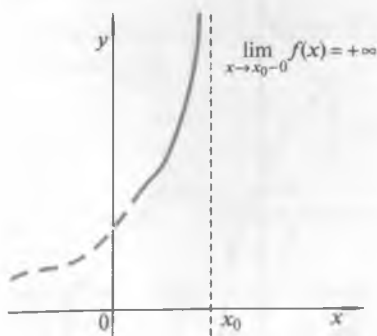


Рис. 24

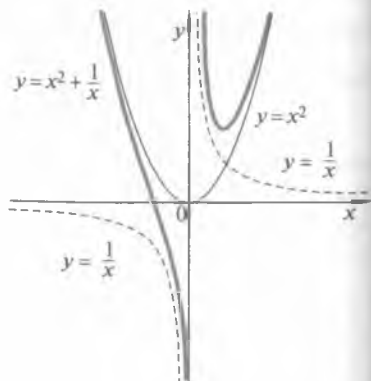


Рис. 25

член x^2 , т.е. график данной функции при больших x напоминает параболу $y = x^2$ тем более, чем больше $|x|$ (рис. 25).

3.4 НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и у нее существует предел при $x \rightarrow x_0$. Возникает вопрос: как он связан со значением функции в этой точке, т.е. с $y = f(x_0)$? Если, образно говоря, поведение функции при $x \rightarrow x_0$ «хорошее», то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция, обладающая этим свойством, называется *непрерывной в точке* x_0 . Если функция непрерывна в каждой точке некоторого множества точек, то она называется *непрерывной на этом множестве* (например, на отрезке $[a, b]$).

График непрерывной на $[a, b]$ функции представляет собой линию, о непрерывности которой можно говорить практически в том же смысле, как мы говорим о непрерывности числовой прямой: на графике не возникает «пробелов», связанных с тем, что не находится точки, которая соответствовала бы результату предельного перехода для значений функции при $x \rightarrow x_0$.

Естественно, что необходимым условием непрерывности функции в точке x_0 является само существование предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Вообще, если для функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 , равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ нарушено (или не имеет смысла, когда, например, указанный предел не существует), то говорят, что $f(x)$ имеет в точке x_0 *разрыв*.

Рассмотрим некоторые полезные перефразировки определения непрерывности функции. Обозначим символами $\Delta x = x - x_0$ *приращение аргумента*, а $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — *приращение функции*. Тогда функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, т.е. $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, или приращение функции в данной точке является бесконечно малой величиной при $\Delta x \rightarrow 0$.

Возьмем для примера функцию $y = x^2$. Ясно, что в любой фиксированной точке x верно равенство

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x),$$

из которого очевидно, что при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$. Значит, эта функция является непрерывной на всей числовой прямой.

Из аналогичных соображений легко усмотреть, что для любого натурального n функция $y = x^n$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Тожественно постоянная функция $y = c$ тоже непрерывна, поскольку для нее $\Delta y = 0$ при любом Δx .

Рассмотрим простейшие свойства непрерывных функций.

1. Обратим вначале внимание на то, что основное равенство, характеризующее непрерывные функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, можно переписать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

и истолковать так: *переход к пределу для непрерывной функции возможен под ее знаком.*

На практике это свойство очень полезно применять при вычислении пределов непрерывных функций: в формулу, задающую функцию, достаточно подставить предельное значение аргумента. Например,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 1} = \frac{1 + 3}{1 + 1} = 2.$$

2. Вспомним далее об арифметических свойствах пределов, из которых в данном случае вытекает непрерывность суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций (если знаменатель не обращается в нуль). Примером использования этого свойства может служить вывод о том, что любой многочлен $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ является непрерывной функцией для всех x .

3. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке. Тогда, приняв на нем два различных значения $A < B$, она будет принимать и все промежуточные значения, т.е. для любого C , расположенного между A и B , найдется точка c такая, что $f(c) = C$.

Не приводя доказательства этого утверждения из-за технических сложностей, укажем лишь на его интуитивную очевидность, связанную с тем, что в данном случае непрерывная функция — это отображение непрерывного множества (промежутка) и по своему исходному определению ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$) не может нарушить этой непрерывности (описательно говоря, создать «пробелы», «разрывы» в образе исходного промежутка). Значит, образом промежутка при непрерывном отображении снова оказывается промежуток.

Если, в частности, непрерывная функция на промежутке принимает отрицательные и положительные значения, то она хотя бы один раз обращается в нуль. Рассмотрим, например, кубическое уравнение

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad (a_0 > 0).$$

Его левая часть — функция, непрерывная на $\mathbb{R}$, причем для больших значений $x > 0$ она заведомо положительна, поскольку при $x \rightarrow \pm\infty$ главным членом, определяющим знак многочлена, оказывается a_0x^3 . Аналогично для больших по модулю значений $x < 0$ левая часть отрицательна. Значит, можно сделать вывод о том, что кубическое уравнение всегда имеет хотя бы один действительный корень. Но, возможно, что у него есть и более, а именно три, действительных корня.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке X , а множество ее значений — промежуток Y . Есть ли у нее обратная функция $x = f^{-1}(y)$?

Ответ в общем случае отрицательный, поскольку для произвольного $y \in Y$ может существовать более одного прообраза $x \in X$ при отображении $y = f(x)$.

Однако можно добавить дополнительные условия, гарантирующие единственность прообраза. Простейший вариант — случай, когда функция $y = f(x)$ *строго монотонно возрастает*, т.е. для любой пары значений аргумента $x_1 < x_2$ верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

В самом деле, если теперь предположить от противного, что у фиксированного значения $y \in Y$ есть два прообраза $x_1 < x_2$, то возникает противоречие для их образов, так как невозможно одновременное выполнение условий: $f(x_1) < f(x_2)$ и $y = f(x_1) = f(x_2)$.

Значит, существование однозначной обратной функции $x = f^{-1}(y)$ гарантировано. Более того, можно утверждать, что эта функция тоже строго монотонно возрастающая (если бы для какой-нибудь пары $y_1 < y_2$ оказалось $x_1 \geq x_2$, где $x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$, то это противоречило бы строго монотонному возрастанию функции $y = f(x)$: из $x_1 \geq x_2$ должно следовать $y_1 \geq y_2$, что несовместимо с условием $y_1 < y_2$) и непрерывна на Y . В самом деле, непрерывность функции $x = f^{-1}(y)$ означает: для любой ε -окрестности точки x_0 найдется такая окрестность точки y_0 , которая отображается функцией f^{-1} в указанную ε -окрестность. Но такую окрестность точки y_0 легко указать — это, например, промежуток — образ заданной ε -окрестности при отображении ее функцией $y = f(x)$.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести в предположение строго монотонного убывания функции $y = f(x)$.

Итак, справедлива следующая теорема о существовании и свойствах обратной функции.

Т е о р е м а. Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонно возрастает (убывает) на промежутке X , то на соответствующем промежутке Y (множестве значений $f(x)$) существует об-

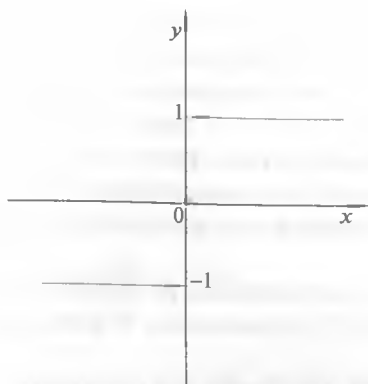


Рис. 26

ратная функция $x = f^{-1}(y)$, строго монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Предположим теперь, что функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки x_0 , исключая саму точку x_0 , в которой имеет разрыв. Тогда при исследовании ее свойств и вида графика важно рассмотреть ее поведение при $x \rightarrow x_0$, в частности односторонние пределы при $x \rightarrow x_0 + 0$ и $x \rightarrow x_0 - 0$. Если таковые существуют, то говорят, что это *разрыв I рода*, или скачок.

Примером может служить функция $y = \operatorname{sgn}(x)$, указывающая знак числа x :

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 26.

Все остальные разрывы называют *разрывами II рода*.

Простейшим примером является функция $y = \frac{1}{x}$, рассмотренная

в окрестности точки $x = 0$.

В большинстве приложений математики приходится иметь дело с непрерывными функциями или функциями, для которых непрерывность нарушается всего лишь в нескольких точках. Однако с чисто математических позиций непрерывные функции представляют собой довольно узкий класс во множестве всевозможных функций действительного переменного. Приведем в этой связи пример функции Дирихле, определенной на $\mathbb{R}$ и разрывной в каждой точке:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Пусть x_0 — произвольная точка. Предел функции $D(x)$ в ней не существует, поскольку всегда можно выбрать две последовательности точек $(r_n) \rightarrow x_0$ и $(\alpha_n) \rightarrow x_0$, где r_n — рациональные числа, а α_n — ир-

рациональные, и тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} D(r_n) = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\alpha_n) = 0$ (напомним, что если предел существует, то только один).

Функция $D(x)$, образно говоря, «отмечает» рациональные точки среди всех точек числовой оси. Аналогичные функции можно рассматривать для любого произвольно взятого числового множества.

Рассмотренные понятия предела и непрерывности функции в точке имеют смысл и для функций нескольких переменных, поскольку эти функции определены для множества точек пространства, в котором имеет смысл понятие окрестности. Например, о функциях двух независимых переменных $z = f(x, y)$ можно говорить как о функциях определенного множества точек плоскости: $z = f(P)$, где $P = P(x, y)$. Окрестностью фиксированной точки $P_0(x_0, y_0)$ будет круг радиуса ϵ с центром в этой точке. Поэтому определение предела $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$, сформулированное в терминах окрестностей точки $P_0(x_0, y_0)$ на плоскости и точки A на числовой прямой, полностью сохраняется. Аналогично, функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0, y_0)$, если $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

4.1. ПРОСТЕЙШИЕ ПОНЯТИЯ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ФУНКЦИЙ

Как отмечалось, специальное конструирование некоторых множеств, прежде всего числовых, является важнейшим средством математики, позволяющим исследовать реально существующие объекты и закономерности. Нечто аналогичное производится и с функциями: среди всевозможных функций специальному определению и углубленному изучению подвергаются некоторые из них. Основная цель — использовать их в дальнейшем для построения аппарата математического моделирования. Первоочередного внимания в этом плане заслуживают так называемые *простейшие элементарные функции*, позволяющие сконструировать большой класс *элементарных функций*.

Прежде всего напомним определения нескольких простых понятий, используя которые можно описывать свойства и выделять некоторые классы функций.

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве, которое вместе с каждой точкой x содержит и точку $(-x)$. Например, на отрезке $[-a, a]$ или на всей числовой прямой. Если для любого x выполняется равенство

$$f(-x) = f(x),$$

то функция называется *четной*, а если равенство

$$f(-x) = -f(x),$$

то *нечетной*.

У четной функции значение не меняется, если заменить x на $(-x)$, а у нечетной меняется только знак. Поэтому график четной функции

симметричен относительно оси Oy (рис. 27), а нечетной — относительно начала координат (рис. 28).

Например, функции $y = x^2$, $y = |x|$, $y = \frac{|x|+2}{x^2+3}$ — четные, а функции $y = x$, $y = x^3$, $y = \frac{x|x|}{x^2+1}$ — нечетные.

Если удалось выяснить, что некоторая функция четная или нечетная, то достаточно изучить ее свойства, например, только для случая $x > 0$, а далее воспользоваться указанной симметрией. Ясно, что произвольно взятая функция вовсе не обязательно является четной или нечетной.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве, обладающем тем свойством, что вместе с каждой своей точкой x оно содержит и точку $x + T$, где T — некоторое фиксированное число. Например, на всем множестве $\mathbb{R}$. Если при этом оказывается, что верно равенство

$$f(x + T) = f(x),$$

то $f(x)$ называется *периодической функцией с периодом T* .

Добавление к аргументу фиксированного числа геометрически означает сдвиг вдоль числовой оси на величину T . Таким образом, график периодической функции не изменится, если его сдвинуть вдоль числовой оси на величину T (или на величину $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ...).

На рис. 29 изображен график ступенчатой функции, имеющей наименьший положительный период $T = 2$ (периодом оказывается любое четное целое число).

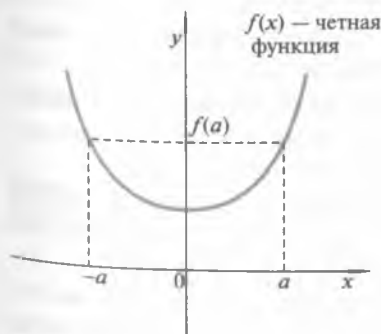


Рис. 27

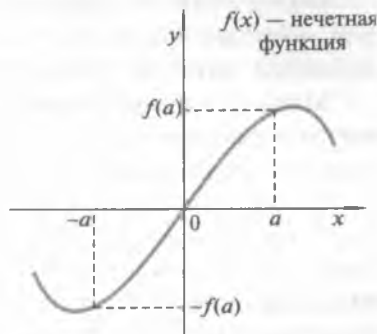


Рис. 28

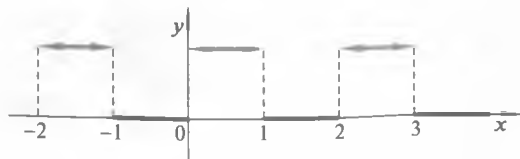


Рис. 29

У функции Дирихле $D(x)$ периодом оказывается любое рациональное число.

3. Пусть $x_1 < x_2$ — любая пара значений аргумента из области определения функции $y = f(x)$. Если выполнено соотношение

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{т. е. } \Delta y \geq 0 \text{ при } \Delta x > 0),$$

то $f(x)$ называется *монотонно возрастающей*; если

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{т. е. } \Delta y > 0 \text{ при } \Delta x > 0),$$

то *строго монотонно возрастающей*; если

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{т. е. } \Delta y \leq 0 \text{ при } \Delta x > 0),$$

то *монотонно убывающей*; если

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (\text{т. е. } \Delta y < 0 \text{ при } \Delta x > 0),$$

то *строго монотонно убывающей*.

При записи этих определений в терминах приращения аргумента Δx и приращения функции Δy мы обозначили $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

4. Множество E действительных чисел называется *ограниченным сверху*, если существует число M (называемое *верхней границей*) такое, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \leq M$.

Аналогично множество действительных чисел называется *ограниченным снизу*, если существует число m (называемое *нижней границей*) такое, что для всех $x \in E$ верно $x \geq m$.

Множество, ограниченное сверху и снизу одновременно, называется *ограниченным*. Геометрически такое множество оказывается целиком расположенным на отрезке $[m, M]$ числовой оси.

Рассмотрим теперь множество значений некоторой функции $y = f(x)$, определенной, например, на отрезке $[a, b]$. Если оно ограничено, то и функция называется *ограниченной на отрезке $[a, b]$* . Аналогично вводятся определения функции, *ограниченной сверху* или *снизу*. График ограниченной функции целиком расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = m$ и $y = M$.

Неограниченная функция может принимать сколь угодно большие (по модулю) значения, т. е. какое бы число M ни было указано, найдется хотя бы одна точка x_M из области определения, такая, что $|f(x_M)| > M$.

Например, функция $y = \frac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$ не ограничена сверху. Геометрически это означает, что для любой прямой $y = M$ найдутся точки графика, расположенные выше нее (рис. 30). Можно показать, что если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена (теорема Вейерштрасса).

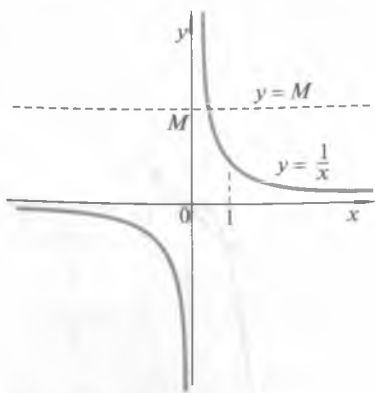


Рис. 30

5. Если для функции $y = f(x)$ существует точка x_0 , такая, что $f(x_0) = 0$, то x_0 называется *нулем* этой функции (или *корнем* уравнения $f(x) = 0$). Нули функции — это точки пересечения графика функции с осью Ox .

6. Введенные ранее понятия предела, непрерывности, разрывов различного рода, асимптот и асимптотического поведения относятся к числу наиболее важных при исследовании свойств функций и их классификации.

7. Для описания свойств функций иногда полезно рассматривать их не на всем множестве, где они определены, а лишь на некотором подмножестве. Тогда говорят, что рассматривается *сужение* функции на указанном подмножестве. Например, функция $y = x^2$, определенная на $\mathbb{R}$, очевидно, не является монотонной, но если рассмотреть ее сужение на $[0, \infty)$, то можно убедиться, что она является строго монотонно возрастающей функцией, и затем воспользоваться этим фактом, например, применяя теорему о существовании обратной функции $x = \sqrt{y}$.

4.2.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Рассмотрим функцию вида $y = x^\alpha$, где x — действительные значения аргумента, а α — некоторое фиксированное действительное число; x — *основание* степени, α — *показатель* степени. Пока мы указали

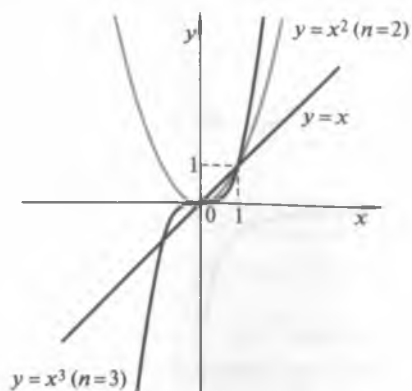


Рис. 31

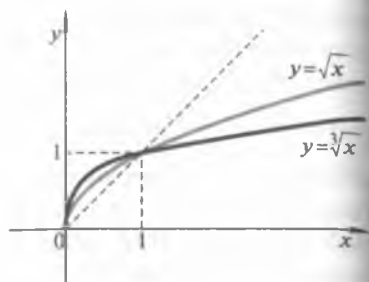


Рис. 32

лишь обозначение функции, а определение смысла возведения числа x в действительную степень α не привели. Это ближайшая и не очень простая задача.

В частном случае, когда $\alpha = n$ — натуральное число, все просто: x^n — это результат умножения числа x самого на себя n раз. Функция $y = x^n$ определена на $\mathbb{R}$ и непрерывна. На рис. 31 приведены примеры ее графика для $n = 1, 2, 3$.

Каждый такой график можно изобразить с любой точностью, если выбрать достаточно крупный масштаб на осях координат и составить подробную таблицу значений функции для избранных значений аргумента.

Сужение функции $y = x^n$ на $(0, \infty)$ является строго монотонно возрастающей функцией. Значит, для нее выполнены условия теоремы о существовании и свойствах обратной функции, которая обозначается $x = \sqrt[n]{y}$ или $x = y^{\frac{1}{n}}$.

Поменяв ролями обозначение переменных, мы приходим к выводу, что удалось определить степенную функцию $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ для случая показателя степени вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное. Эта функция определена на $(0, \infty)$ (множество значений сужения функции $y = x^n$), непрерывна и строго монотонно возрастает. Ее называют корнем n -й степени из x . Примеры графиков таких функций показаны на рис. 32.

Теперь можно определить и функцию $y = x^{\frac{m}{n}}$, где m, n — натуральные числа, как сложную (см. подразд. 4.7) функцию вида $y = (x^{1/n})^m$. Она тоже непрерывна и строго монотонно возрастает.

Следующий шаг — определение $y = x^r$, где r — любое рациональное число: для $r > 0$ определение уже дано; при $r = 0$, $y = 1$ (тождественно постоянная функция); при $r < 0$ полагаем по определению $x^r = \frac{1}{x^{-r}}$ —

это непрерывная и строго монотонно убывающая функция. Примеры ее графиков показаны на рис. 33.

И наконец, если α — иррациональное число, то существует последовательность рациональных чисел (r_n) $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к α (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$), и можно положить по определению

$$x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}.$$

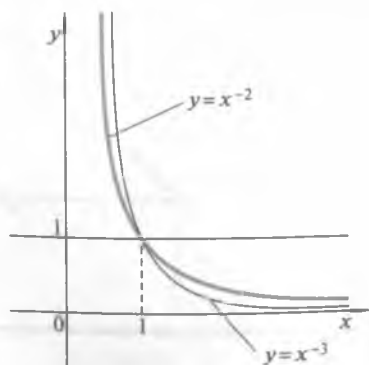


Рис. 33

Такое определение будет корректно только при выполнении двух условий: указанный предел должен существовать, и он не должен зависеть от выбора последовательности $r_n \rightarrow \alpha$. Оказывается, оба условия выполнены (доказательство не приводим). Тем самым определение *степенной функции* $y = x^\alpha$ завершено, причем оказывается, что при любых действительных $\alpha \neq 0$ она непрерывна на $(0, \infty)$, а множество ее значений — луч $(0, \infty)$; при $\alpha > 0$ она монотонно возрастает, а при $\alpha < 0$ — монотонно убывает.

З а м е ч а н и е. Для некоторых частных случаев функцию $y = x^\alpha$ можно рассматривать и на более широком множестве действительных чисел. Например, функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ при нечетном n определена на всей числовой прямой; аналогично функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ при нечетном n определена для всех действительных чисел, кроме $x = 0$. Приведем график функции $y = x^{\frac{2}{3}}$ (рис. 34).

Существует несколько простых **правил оперирования степенями**:

$$1) x_1^\alpha \cdot x_2^\alpha = (x_1 \cdot x_2)^\alpha;$$

$$2) \frac{x_1^\alpha}{x_2^\alpha} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^\alpha;$$

$$3) x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} = x^{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

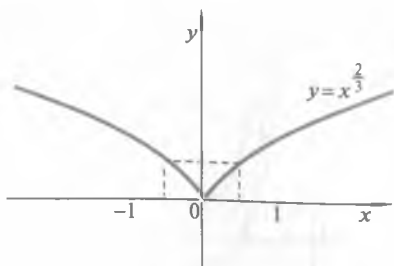


Рис. 34

$$4) \frac{x^{\alpha_1}}{x^{\alpha_2}} = x^{\alpha_1 - \alpha_2};$$

$$5) (x^{\alpha_1})^{\alpha_2} = x^{\alpha_1 \cdot \alpha_2}.$$

Все они доказываются по одной и той же схеме: из приведенного ранее определения обнаруживают, что они очевидны для случая натуральных показателей; затем их проверяют для корней n -й степени — тем самым фактически уже установлена их справедливость для рационального α ; наконец, в силу непрерывности соответствующей функции они сохраняются и при предельном переходе, т.е. и для иррациональных α . Например, свойство 1 для $\alpha = \frac{1}{n}$ приобретает вид

$$\sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} = \sqrt[n]{(x_1 \cdot x_2)}$$

и доказывается следующим рассуждением: возводим обе части последнего равенства в степень n , получаем верное равенство $x_1 x_2 = x_1 x_2$; но если n -е степени двух чисел a и b совпадают ($a^n = b^n$), то совпадают и сами числа (т.е. $a = b$), поскольку если оказалось бы, что $a < b$, то в силу монотонности степенной функции было бы верно $a^n < b^n$.

4.3. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Определив степенную функцию $y = x^\alpha$ для $x > 0$ и любого фиксированного числа α , можно поменять числа x и α ролями, т.е. зафиксировать основание степени и сделать переменным ее показатель. Так возникает понятие *показательной функции* $y = a^x$, где фиксированное число $a > 0$ и x — любое действительное число. Правда, есть один частный случай, для которого рассмотрение показательной функции становится неинтересным: $a = 1$. Тогда $y = 1$ при всех значениях x , т.е. это функция, тождественно равная 1. Этот случай далее будем исключать из рассмотрения, полагая $a \neq 1$.

Составив таблицу значений показательной функции, можно построить ее график. На рис. 35, 36 приведены примеры нескольких графиков таких функций, поведение которых наиболее существенно

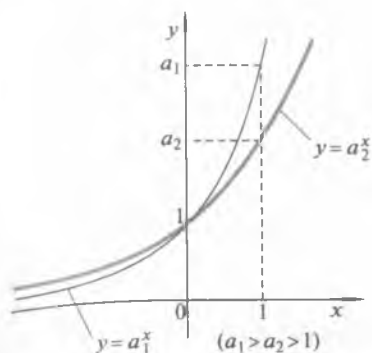


Рис. 35

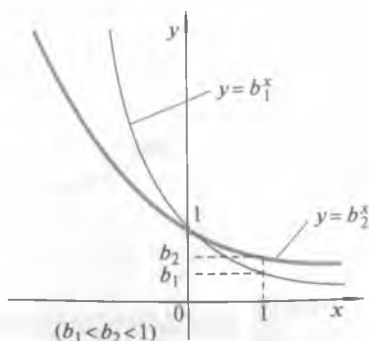


Рис. 36

отличается друг от друга в зависимости от величины основания в сравнении с 1.

На приведенных графиках наглядно представлены *основные свойства показательной функции*, среди которых выделим следующие:

- показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$;
- при $a > 1$ показательная функция строго монотонно возрастает на $\mathbb{R}$, а при $a < 1$ — строго монотонно убывает;
- если $a > 1$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$;
- если $a < 1$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$;
- показательная функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

По поводу утверждения о непрерывности заметим, что в отличие от перечисленных ранее свойств, которые нетрудно доказать на основе соответствующих определений, установление его справедливости требует довольно тонких рассуждений. Речь идет о проверке равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ или, в терминах приращений, Δx и Δy :

$$\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

В итоге все доказательства (здесь их не приводим) используют определение произвольной степени положительного действительного числа (см. подразд. 4.2).

Укажем также на *правила оперирования показательными выражениями*, аналогичные приведенным ранее правилам действий со степенями:

$$1) a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2};$$

$$2) \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2};$$

$$3) (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2};$$

$$4) a^{x_1} \cdot b^{x_1} = (ab)^{x_1};$$

$$5) \frac{a^{x_1}}{b^{x_1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{x_1}.$$

4.4. ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Перечисленные в подразд. 4.3 свойства показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) позволяют применить для нее теорему о существовании и свойствах обратной функции (см. подразд. 3.4): обратная функция существует, определена, непрерывна и строго монотонна на множестве положительных действительных чисел $(0, \infty)$, имеет $\mathbb{R}$ своим множеством значений.

Эту функцию называли *логарифмической* и обозначили $y = \log_a x$. Таким образом, записи $y = \log_a x$ и $x = a^y$ эквивалентны. При этом переход от равенства $x = a^y$ к $y = \log_a x$ называют *логарифмированием*, а обратный переход — *потенцированием*.

Число a называют *основанием логарифма*. Ясно, что в качестве основания логарифмической функции может быть выбрано любое положительное число a , кроме $a = 1$. Значит, *логарифмом* числа x по основанию a называют показатель степени y , в которую нужно возвести число a , чтобы получить число x . Другими словами, верна формула

$$a^{\log_a x} = x.$$

Чаше всего выбирают $a = 10$ (тогда логарифмы называют *десятичными* и обозначают их символом $\lg x$) или $a = 2$ (соответствующие логарифмы называют *двоичными*: $\log_2 x$), или, особенно часто, $a = e$, где $e \approx 2,718...$ — определенное ранее (см. подразд. 3.1) число (тогда логарифмы называют *натуральными* и обозначают $\ln x$).

При вычислении логарифмов можно легко переходить от одного основания к другому, используя следующую *формулу перехода*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Эта формула легко запоминается по следующему mnemonicескому (т.е. предназначенному лишь для запоминания) правилу:

$$\frac{x}{a} = \frac{\frac{x}{b}}{\frac{a}{b}}$$

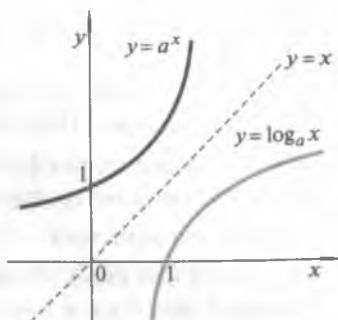


Рис. 37

(которое к доказательству формулы перехода, конечно, никакого отношения не имеет). А вот доказательство формулы: обозначим $y_1 = \log_a x$, $y_2 = \log_b x$, $y_3 = \log_b a$; тогда $a^{y_1} = x$, $b^{y_2} = x$, $b^{y_3} = a$; необходимо убедиться,

что $y_1 = \frac{y_2}{y_3}$; замечаем, что $x = a^{y_1} =$

$$= (b^{y_3})^{y_1} = b^{y_1 y_3} \stackrel{y_2}{=} b^{y_1 y_3} = (b^{y_2})^{y_1 y_3} = x^{y_1 y_3} = x^{y_1 \frac{y_3}{y_2}}, \text{ т.е. } x = x^{y_1 \frac{y_3}{y_2}} \text{ или } y_1 \cdot \frac{y_3}{y_2} = 1; \text{ зна-}$$

чит, $y_1 = \frac{y_2}{y_3}$.

Частный случай формулы перехода: $\ln x = \frac{1}{\lg e} \lg x \approx 2,3 \lg x$.

График логарифмической функции легко получить из графика показательной функции отражением относительно прямой $y = x$ (рис. 37).

Приведем для примера еще несколько графиков логарифмической функции с разными основаниями (рис. 38). Для практического построения таких графиков (как, впрочем, и других графиков элементарных функций) можно использовать специальные таблицы, которые часто приводятся в справочниках по математике.

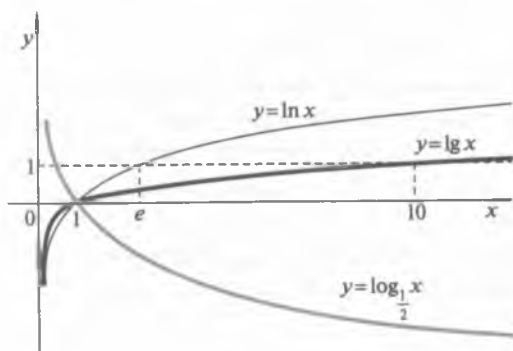


Рис. 38

По наиболее характерным точкам графика отметим, что $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$.

Из определения логарифмической функции вытекают все ее *основные свойства*. Перечислим важнейшие из них:

- область определения функции $y = \log_a x$ — множество положительных действительных чисел ($a > 0$, $a \neq 1$);
- множество значений — $\mathbb{R}$;
- при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является строго монотонно возрастающей, при $0 < a < 1$ — строго монотонно убывающей;
- логарифмическая функция непрерывна;
- если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то $\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$ (т.е., говоря кратко, логарифм произведения равен сумме логарифмов).

Последнее свойство иногда называют *основным свойством логарифмов*, поскольку оно определяет главную специфику логарифмической функции в классе простейших элементарных функций, а при аксиоматическом ее определении (возможны и такие варианты определения) выступает в качестве основной аксиомы. Доказательство основного свойства логарифмов связано с использованием аналогичного основного свойства показательной функции: $a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2}$. Действительно, обозначив $y_1 = \log_a x_1$; $y_2 = \log_a x_2$; $y_3 = \log_a x_1 \cdot x_2$, получаем в результате потенцирования $x_1 = a^{y_1}$, $x_2 = a^{y_2}$, $x_1 x_2 = a^{y_3}$, и поэтому $a^{y_3} = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2}$, т.е. $y_3 = y_1 + y_2$.

Понятно, что и другие правила оперирования показательными выражениями, приведенные ранее, порождают соответствующие свойства логарифмов:

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad (x_1 > 0, x_2 > 0);$$

$$\log_a x^k = k \log_a x \quad (x > 0) \text{ и т.д.}$$

Из приведенных выше графиков логарифмических функций относительно их поведения при изменении x полезно заметить, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$ ($a > 0$), однако рост этой функции оказывается очень **медленным**: например, все степенные функции $y = x^\alpha$ при $\alpha > 0$ растут быстрее (см. рис. 31, 32). Если же $x \rightarrow +0$, то логарифмическая функция по модулю **растет очень быстро** (быстрее, чем любая степень $y = x^\alpha$ при $\alpha < 0$). Другими словами, справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \quad (a > 1, \alpha > 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|\log_a x|}{x^\alpha} = \infty \quad (\alpha < 0).$$

Естественно, что «двойственные» соотношения имеют место и для показательной функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty \quad (a > 1, \alpha > 0)$$

(т.е. показательная функция растет «на бесконечности» быстрее любой степени);

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{|x^\alpha|} = 0 \quad (a > 1, \alpha < 0)$$

(т.е. показательная функция при $a > 1$ стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$ быстрее любой степени). Доказательство этих свойств здесь не приводим.

4.5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим вначале прямоугольный треугольник ABC с острым углом α (рис. 39). Назовем *синусом* угла α отношение $\frac{a}{c}$ (обозначение: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$) и *косинусом* угла α отношение $\frac{b}{c}$ (обозначение: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$). Нетрудно видеть, что синус и косинус *зависят лишь от угла* α и не зависят от размеров треугольника ABC .

Действительно, при фиксированном α треугольники ABC и AB_1C_1 будут подобными, и поэтому $\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$; $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$, где a_1, b_1, c_1 — соответствующие катеты и гипотенуза треугольника AB_1C_1 (рис. 40).

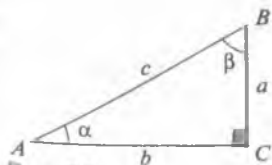


Рис. 39

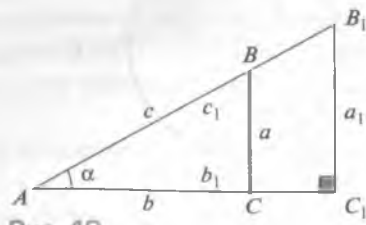


Рис. 40

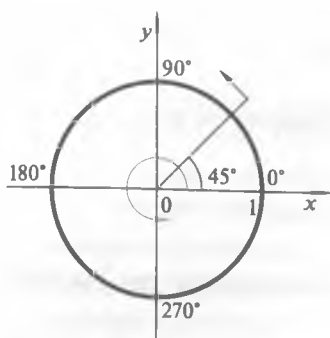


Рис. 41

Поэтому при изучении свойств синуса и косинуса можно в качестве гипотенузы брать радиус $r = 1$ окружности, т.е. отсчитывать углы, пользуясь единичной окружностью. Если полный оборот такого радиуса относительно центра круга считать углом в 360° , то ясно, что любой угол можно измерить в градусах. На рис. 41 указана градусная мера некоторых углов. Обычно отсчет ведется от направления оси Ox , начиная от 0° , причем поворот радиуса против часовой стрелки считается положительным,

а по часовой стрелке — отрицательным. Положение радиуса при таких поворотах, очевидно, определяется с точностью до любого целого числа полных оборотов, поскольку положение радиуса будет одним и тем же при углах $\alpha \pm 360^\circ$; $\alpha \pm 720^\circ$; ...

Заметим, что если первоначально синус и косинус нами были определены лишь для острых углов, то теперь появляется возможность расширить определение. Для этого достаточно поместить центр единичной окружности в начало координат и брать величины a и b в соответствии с теми знаками, которые имеют проекции точки окружности на оси координат. В результате оказывается, что знаки синуса и косинуса для углов, связанных с разными четвертями круга, таковы, как показано на рис. 42, 43.

Однако градусная мера угла далеко не всегда удобна, прежде всего, потому, что определенные выше синус и косинус не попадают в класс функций действительного переменного, для которых аргу-



Рис. 42



Рис. 43

ментом являются числа (а не элементы других множеств — в данном случае углов, поскольку 1 градус — это угол, возникающий в результате деления круга радиусом 1 на 360 равных частей). Это обедняет возможности введения алгебраических операций для данных функций: например, углы можно складывать, тогда складываются их градусные меры, но нельзя, например, перемножать. В итоге запись $\sin(\alpha \cdot \beta)$, где α и β — углы, смысла иметь не будет.

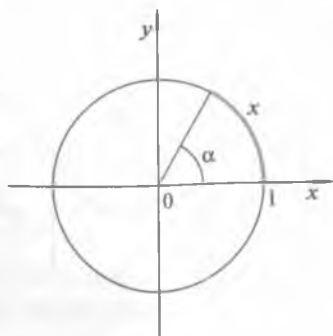


Рис. 44

Поэтому вводят еще числовую меру углов, называемую *радианной*. Делается это путем построения следующего отображения множества углов в числовое множество: каждому углу α сопоставляется длина дуги x единичной окружности, обозначенная на рис. 44. Поскольку длина единичной окружности равна 2π , то изменению угла в пределах $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ соответствует изменение $0 \leq x < 2\pi$ (при $\alpha = 45^\circ$ $x = \frac{\pi}{4}$; при $\alpha = 90^\circ$ $x = \frac{\pi}{2}$; при $\alpha =$

$= 180^\circ$ $x = \pi$ и т.д.). Если, в частности, оказывается, что $x = r$, то угол имеет радианную меру $x = 1$. Построенное отображение является взаимно-однозначным в пределах изменения значений α и x .

Теперь мы можем определить синус и косинус *на множестве действительных чисел*, договорившись, что $\sin x$ (где x — число) совпадает с синусом угла в x радиан.

Это определение легко распространить на всю числовую прямую $\mathbb{R}$, поскольку добавление к аргументу числа $2k\pi$, где k — целое, не изменяет положение радиуса, задающего угол. Отрицательным значениям x будет соответствовать отсчет углов в отрицательном направлении (т.е. по часовой стрелке). Поэтому $\sin x$ оказывается периодической функцией с периодом 2π . Аналогично — функция $\cos x$.

З а м е ч а н и е. Важно понимать, что синус угла и синус числа — это разные функции, поскольку у них различные области определения. Однако связь между этими функциями настолько проста, что традиционно сохраняется в названии этих функций одно и то же ключевое слово «синус».

Составив таблицу значений, можно построить график функции $y = \sin x$ (рис. 45).

График функции $y = \cos x$ изображен на рис. 46.

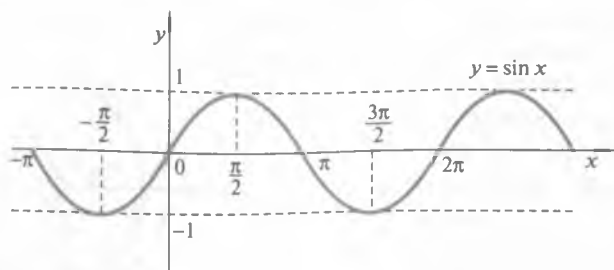


Рис. 45

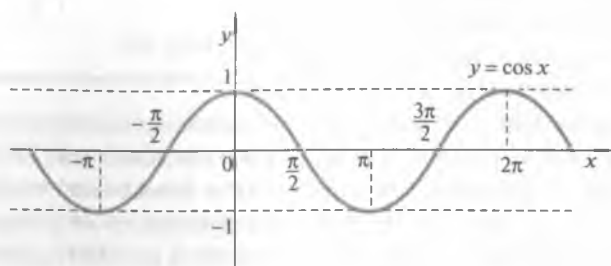


Рис. 46

Обратим внимание на некоторые *свойства этих функций*, вытекающие непосредственно из их определения и наглядно представленные на графиках:

- значения синуса и косинуса определены на всей числовой прямой и ограничены, причем множество их значений — отрезок $[-1, 1]$;
- $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют период 2π , т. е. их значения повторяются при сдвиге аргумента вдоль оси Ox на любое число, кратное 2π :

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x; \cos(x + 2k\pi) = \cos x, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

- на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $y = \sin x$ является строго монотонно возрастающей функцией, а $y = \cos x$ на $[0, \pi]$ — строго монотонно убывающей;
- функция $y = \sin x$ является нечетной, а функция $y = \cos x$ — четной;
- функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны;
- графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ отличаются друг от друга сдвигом вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$.

Последнее свойство связано с так называемыми *формулами приведения*, представителями которых являются:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Указанные формулы очевидны уже на самом первом шаге данного ранее определения синуса и косинуса для острых углов (см. рис. 39): например, $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$, где $\beta = 90^\circ - \alpha$. Легко проследить, что при всех последующих переходах к понятию синуса и косинуса числового аргумента они не нарушаются.

Пользуясь указанными формулами приведения, легко получить и другие. Например,

$$\sin(\pi - x) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Мы не будем указывать другие формулы приведения, а заметим лишь одно общее их свойство.

С в о й с т в о. Если рассматривать отклонение аргумента от числа $\frac{\pi}{2}$, то синус превращается в косинус, а косинус — в синус (с учетом их знака для соответствующих значений аргумента): если отклонение берется от числа π , то наименование функции не меняется.

Это замечание относится и к другим тригонометрическим функциям, обсуждаемым далее.

Теорема Пифагора для треугольника ABC , перефразированная с помощью понятия о синусе и косинусе, приводит к равенству, справедливому для всех значений x :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

которое называется *основным тригонометрическим тождеством*.

Рассмотрим еще несколько простейших тригонометрических функций.

Тангенс (обозначение $y = \operatorname{tg} x$): по определению $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, область определения задается условием $\cos x \neq 0$, т. е. из числовой оси должны быть исключены нули косинуса: $x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$

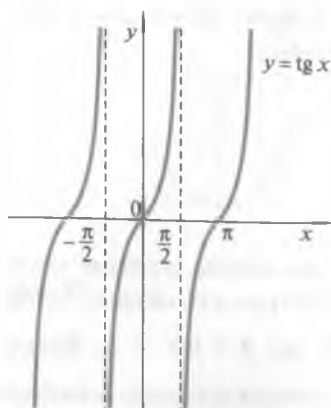


Рис. 47

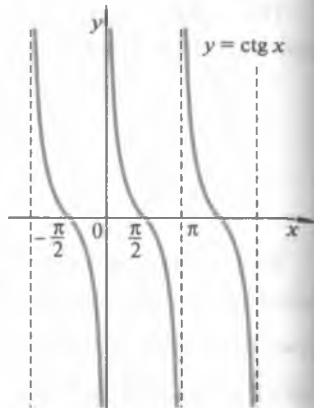


Рис. 48

График функции $y = \operatorname{tg} x$ показан на рис. 47.

Наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$ оказывается равным π , т.е. $\operatorname{tg}(x \pm k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k = 0, \pm 1, \dots$

Котангенс (обозначение $y = \operatorname{ctg} x$): по определению $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, т.е. эта функция определена на всей числовой оси, исключая точки $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Ее график показан на рис. 48.

Котангенс также имеет период π . Ясно, что тангенс и котангенс — нечетные функции, непрерывные всюду, где они определены. Характер их монотонности на соответствующих промежутках оси Ox показан на графиках.

Реже используются функции **секанс** (обозначение $y = \operatorname{sec} x$) и **косеканс** (обозначение $y = \operatorname{cosec} x$). По определению $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$;

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$. Основные их свойства легко усмотреть из их определения.

В практике использования тригонометрических функций полезно знать наизусть их точные значения для некоторых частных значений аргумента (табл. 1).

Если запомнить закон изменения знаков тригонометрических функций в диапазоне $0 \leq x < 2\pi$ и воспользоваться формулами приведения, то сфера полезного использования данной таблицы значительно расширится. Укажем эти законы для наглядности в различных четвертях круга (рис. 49).

Таблица 1. Значения тригонометрических функций для некоторых значений аргумента

Угол		Функция			
Градусная мера	Рadianная мера	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0°	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

Например, желая вычислить $\sin \frac{5\pi}{4}$, замечаем, что угол, соответствующий $\frac{5\pi}{4}$, относится к III четверти, где синус отрицателен. Поскольку $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$, то $\sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (при отклонении аргумента от π наименование функции не изменилось, но учтен знак вычисляемого значения синуса).



Рис. 49

4.6. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотренные в подразд. 4.5 тригонометрические функции являются периодическими, поэтому обратные функции для них *не существуют*: одно и то же значение функции y_0 , возникшее, например, при $x = x_0$, будет возникать и для $x = x_0 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$ Поэтому в «обратном» соответствии придется значению y_0 сопоставить бесконечно много значений x . А функция — это *однозначное* соответствие.

Однако в подразд. 4.1 было обозначено понятие сужения функции, позволяющее сделать постановку вопроса о функциях, обратных к тригонометрическим, математически корректной: достаточно рассмотреть тригонометрические функции не на всей области их определения, а лишь на определенных промежутках, например таких, для которых применима теорема о существовании и свойствах обратной функции.

Для функции $y = \sin x$ соответствующим ограничением может быть, например, условие: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. На данном отрезке функция $y = \sin x$ строго монотонно возрастает от -1 до 1 и непрерывна, поэтому существует обратная функция, называемая *арксинусом*, которая обозначается $y = \arcsin x$. Область ее определения — отрезок $[-1, 1]$, а множество значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Эта функция непрерывна,

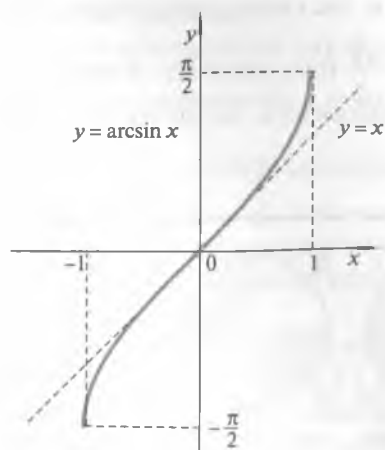


Рис. 50

строго монотонно возрастает и нечетная; ее график является симметричным графику исходной функции относительно прямой $y = x$ (рис. 50).

Итак, для $-1 \leq x \leq 1$ и $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ записи $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$ эквивалентны и верно равенство $\sin(\arcsin x) = x$.

Совершенно аналогично, взяв ограничение $0 \leq x \leq \pi$, убеждаемся в существовании функции, обратной к функции $y = \cos x$, которая называется *арккосинусом* и обозначается

$y = \arccos x$. Это функция, определенная на $[-1, 1]$ со значениями на отрезке $[0, \pi]$, строго монотонно убывающая. При указанных ограничениях для нее верно равенство: $\cos(\arccos x) = x$. График $y = \arccos x$ изображен на рис. 51.

Для функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ возможны аналогичные построения. Предоставляя читателю возможность самостоятельно рассмотреть функцию $y = \operatorname{arctg} x$, приведем лишь краткие сведения о функции $y = \operatorname{arctg} x$, являющейся обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$ при сужении

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$: она определена, непрерывна и строго монотонно возрастает на всей числовой прямой; функция нечетная; ее график имеет вид, приведенный на рис. 52.

Сравним графики функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$. Легко заметить, что второй можно получить из первого, выполнив два преобразования. Вначале построим график $y = -\arcsin x$ (это преобразование симметрии относительно оси Oy), а затем $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ (это сдвиг полученного графика вверх вдоль оси Oy). Значит, верна формула

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

или

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

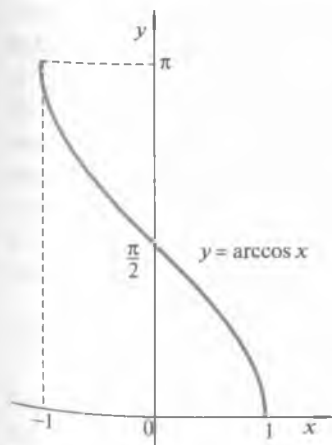


Рис. 51

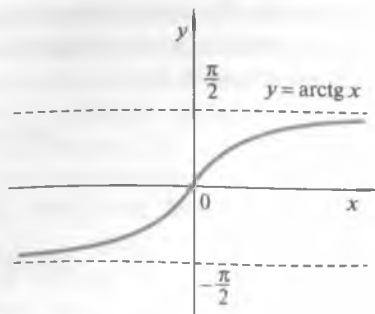


Рис. 52

Однако рассуждения, существенно использующие график функции, нельзя считать математически строгими, поэтому полезно провести доказательство на основе исходных определений. Оно оказывается несложным. Полагаем $-1 \leq x \leq 1$ и вычислим синус от обеих частей последнего равенства:

$$\sin(\arcsin x) = x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$$

(использована формула приведения).

Мы убедились, что синусы равны. Тогда будут равны и выражения, для которых вычислены эти синусы, если только мы не вышли за пределы их изменения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Но такого «выхода» не было, так как

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2},$$

поскольку последнее неравенство эквивалентно $0 \leq \arccos x \leq \pi$.

Аналогичная простая взаимосвязь существует между функциями $y = \arctg x$ и $y = \operatorname{arccctg} x$:

$$\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Приведем еще один пример оперирования обратными тригонометрическими функциями. Вычислим $\cos(\arcsin x)$, где $-1 \leq x \leq 1$. Для этого обозначим $y = \arcsin x$, что эквивалентно $x = \sin y$ для $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Замечаем, что нам удалось перефразировать исходную задачу: известно, что $\sin y = x$, требуется найти $\cos y$. Но последнее легко сделать по формуле

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1,$$

т. е. $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ (мы взяли перед корнем знак «+», поскольку при $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ косинус неотрицателен). Итак,

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Мы ввели в рассмотрение и частично исследовали несколько видов функций, которые называют *простейшими элементарными*: тождественно постоянные (константы), степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические. Все это числовые функции, определенные на некоторых множествах действительных чисел, непрерывные во всей области своего определения. Ясно, что с такими функциями можно осуществлять все арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление (каждый раз исключая случай обращения знаменателя в нуль). Таким образом, класс функций, свойства которых можно исследовать на основе свойств простейших элементарных функций, существенно расширяется.

Появляется возможность рассматривать, например, *многочлены*

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

дробно-рациональные функции вида $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены ($Q_m(x) \neq 0$), комбинации вида $A \cos x + B \sin x$, которые оказываются полезными при изучении колебательных процессов.

Существует еще одна важная операция, называемая композицией функций, позволяющая рассматривать сложные функции, т. е. функции, аргументом которых также оказываются значения функций. Вот ее формальное определение.

Пусть функция $y = y(x)$ определена на множестве X и Y — множество ее значений. Предположим, что функция $z = z(y)$ определена на Y со значениями в Z . Тогда оказывается, что каждому значению $x \in X$ сопоставлено определенное $y \in Y$ (функцией $y = y(x)$), которому, в свою очередь, сопоставлено определенное $z \in Z$ (функцией $z = z(y)$) и, следовательно, на X определена функция со значениями во множестве Z . Ее называют *композицией* функций $z = z(y)$ и $y = y(x)$ или *сложной* функцией и обозначают $z = z(y(x))$. Схематично возникновение сложной функции показано на рис. 53.

Например, функция $y = \sin^2 3x$ может рассматриваться как композиция следующих функций: $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 3x$.

Легко проверить, что сложная функция, построенная из непрерывных функций, тоже является непрерывной функцией. В самом деле, если функция $z = z(y)$ непрерывна в точке y_0 , а $y = y(x)$ непрерывна в точке x_0 , причем $y_0 = y(x_0)$, то $z = z(y(x))$ будет непрерывной

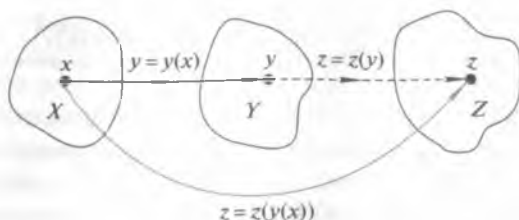


Рис. 53

в точке x_0 : попадание значений z в любую, наперед заданную ε -окрестность точки $z_0 = z(y_0)$ будет гарантировано, если y принадлежит некоторой δ -окрестности точки y_0 (в силу непрерывности функции $z = z(y)$ в точке y_0), а последнее условие также можно обеспечить, выбирая значения x из достаточно малой окрестности точки x_0 (в силу непрерывности функции $y = y(x)$ в точке x_0).

Теперь можно определить весь класс элементарных функций: назовем функцию элементарной, если она может быть образована из простейших элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций.

Поскольку для указанных операций, как и для обозначений простейших элементарных функций, существуют общепринятые соглашения (в смысле знаков $+$, $-$, $\times$, $:$, символики $\log_a x$, $\sin x$ и т. п.), элементарные функции чаще всего задаются формулами.

Предыдущие рассуждения показывают, что элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Как следствие этого утверждения получаем возможность вычислять пределы элементарных функций, просто подставляя в соответствующую формулу предельное значение аргумента (исключая случай, когда при $x \rightarrow x_0$ оказывается, что x_0 не принадлежит области определения элементарной функции).

Элементарные функции являются основным математическим аппаратом описания закономерностей окружающего мира. При этом они используются не только в роли итоговых математических моделей, но и как средство построения более сложных конструкций. Например, многие интегралы или решения дифференциальных уравнений (о них пойдет речь далее) оказываются неэлементарными функциями, но исследование последних, как правило, возможно на основе их приближенного описания элементарными функциями.

Простейшие примеры неэлементарных функций возникают в случае, когда функция на разных подмножествах области определения

задается разными формулами (вспомним, например, функцию $y = \operatorname{sgn} x$ или функцию Дирихле). Однако использование подобного способа задания функции еще не означает, что она обязательно будет неэлементарной. Например, функция

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

является элементарной, поскольку представима в виде $|x| = \sqrt{x^2}$.

4.8.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СВЯЗАННЫХ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Любое уравнение с одной переменной можно записать в виде $f(x) = 0$, а неравенство — в виде $f(x) > 0$ или $f(x) \geq 0$. Для этого достаточно воспользоваться возможностью переносить члены из одной части равенства (неравенства) в другую, меняя при этом их знак. С точки зрения поиска решений такой стандартизованный вид не всегда удобен; в зависимости от вида уравнения или неравенства бывает полезно представить его, например, в записи $f_1(x) = f_2(x)$ или $f_1(x) > f_2(x)$, что также достигается их простейшими преобразованиями.

Будем далее предполагать, что $f(x)$ — элементарная функция. Это предположение открывает возможность использовать в поисках решения все указанные выше свойства функций, участвующих в записи уравнений или неравенств. Опора на такие свойства — главное средство поиска их решения. Но оно не всегда может гарантировать ответ на самые общие вопросы:

- существуют ли решения;
- сколько решений;
- как их найти?

Если удастся выяснить, что на некотором промежутке существует единственное решение, то это важный факт, поскольку даже в тех случаях, когда не удастся найти такое решение точно, можно воспользоваться приближенными методами. Известно, например, что не существует общих формул для корней алгебраических уравнений $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n и $n > 4$. Однако, подсчитывая значения многочлена для нескольких значений аргумента,

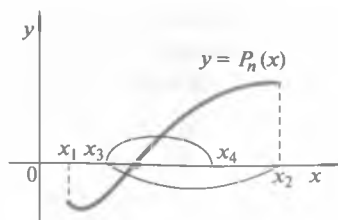


Рис. 54

часто удается выяснить, что $P_n(x_1) > 0$ и $P_n(x_2) < 0$, причем на отрезке $[x_1, x_2]$ есть только один корень. Тогда его можно найти приближенно с любой точностью методом половинного деления: делим рассматриваемый отрезок пополам, подсчитываем значения $P_n(x)$ в точке деления; выбираем для следующего деления пополам ту половину отрезка, для которой на концах $P_n(x)$

имеет разные знаки. Если на каком-то шаге оказалось, что $P_n(x) = 0$, то решение найдено точно, в противном случае границы отрезка, который делится пополам, задают последовательность приближений к корню (рис. 54).

Разработаны и другие, во многих случаях более эффективные методы приближенного решения как алгебраических уравнений, так и иных (их называют трансцендентными).

Однако возможность найти точное решение остается весьма привлекательной. Поэтому заслуживают специального внимания частные случаи уравнений и неравенств, для которых это возможно, — к обсуждению их мы и обратимся в данном подразделе.

Кроме общей рекомендации использовать свойства элементарных функций, участвующих в записи уравнений и неравенств, можно указать и некоторые типовые приемы, помогающие исследовать уравнения и неравенства. Среди них есть специфические, т.е. связанные с конкретными видами элементарных функций. Их применение обычно увязывают с соответствующими разными типами уравнений и неравенств (показательные, логарифмические, тригонометрические и т.д.). Разделение по типам, конечно, условное, поскольку в записи уравнения могут присутствовать одновременно, например, логарифмические и тригонометрические функции, т.е. его с равным правом можно отнести к тому и другому типу.

Есть и более универсальные приемы. Среди последних укажем на прием *замены переменной*, позволяющий в ряде случаев расчленять поиск решения на несколько этапов.

Например, если в уравнении $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$ обозначить $y = \sin x$, то задача сведется к решению квадратного уравнения $y^2 + y - 2 = 0$ (у которого есть два корня $y_1 = -2$, $y_2 = 1$), а затем — к объединению всех решений у двух уравнений: $\sin x = -2$ и $\sin x = 1$. Поскольку первое из них решений не имеет (так как $|\sin x| \leq 1$), замечаем, что

совокупность решений исходного уравнения совпадает с множеством

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \dots \text{ (для каждой точки которого } \sin x = 1 \text{)}.$$

Если уравнение $f(x) = 0$ допускает запись $f_1(x)f_2(x) = 0$, то совокупность его решений будет суммой множеств решений двух уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$. Поскольку каждое из этих уравнений может решаться проще, чем исходное, ясно, что полезен прием *разложения на множители* левой части уравнения. Он может пригодиться и при решении неравенств, так как неравенство $f_1(x)f_2(x) > 0$ оказывается эквивалентным совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f_1(x) > 0; \\ f_2(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f_1(x) < 0; \\ f_2(x) < 0 \end{cases}$$

(их решения следует объединить).

Рассмотрим теперь некоторые частные, простейшие типы уравнений и неравенств.

Показательные уравнения и неравенства. Для них характерно присутствие неизвестного (переменного) в показателе степени. Например, уравнение вида $a^{\varphi_1(x)} = a^{\varphi_2(x)}$ или неравенство $a^{\varphi_1(x)} > a^{\varphi_2(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — некоторые элементарные функции.

Из свойств показательной функции делаем вывод о том, что указанное уравнение равносильно уравнению $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, а неравенство эквивалентно неравенствам

$$\varphi_1(x) > \varphi_2(x), \text{ если } a > 1,$$

$$\text{или } \varphi_1(x) < \varphi_2(x), \text{ если } a < 1.$$

Действительно, если равны показатели, то равны и степени (в силу однозначности операции возведения в степень), а если равны степени, то показатели не могут быть неравными, так как в силу строгой монотонности показательной функции это привело бы к неравенству степеней. Аналогичные рассуждения справедливы для неравенств.

Рассмотрим для примера неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 4^{x+1}$. Его легко

преобразовать к виду $2^{x-x^2} > 2^{2x+2}$, т.е. оно эквивалентно $x - x^2 > 2x + 2$ или $x^2 + x + 2 < 0$. Но последнее неравенство не имеет решений (отрицателен дискриминант квадратного трехчлена $b^2 - 4ac = 1 - 8 < 0$, поэтому $x^2 + x + 2 > 0$). Значит, решений нет и у исходного неравенства.

Логарифмические уравнения и неравенства. В их записи неизвестное оказывается под знаком логарифма. Простейшие типы:

$$\log_a \varphi_1(x) = \log_a \varphi_2(x);$$

$$\log_a \varphi_1(x) > \log_a \varphi_2(x) \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Под знаком логарифма может находиться лишь положительное число, поэтому при рассмотрении таких уравнений следует немедленно ввести ограничения $\varphi_1(x) > 0$ и $\varphi_2(x) > 0$. При их выполнении указанное уравнение оказывается равносильным $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, а неравенство — соответствующему неравенству $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$, если $a > 1$, или $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$, если $a < 1$.

Пусть, например, требуется решить уравнение $\log_4(x+1) = \log_2(x-1)$. Вводим ограничения:

$$\begin{cases} x+1 > 0; \\ x-1 > 0. \end{cases}$$

Замечаем, что у логарифмов разные основания, поэтому воспользуемся формулой перехода $\log_4 y = \frac{\log_2 y}{\log_2 4}$ и, учитывая, что $\log_2 4 = 2$, перепишем уравнение в виде $\log_2 \sqrt{x+1} = \log_2(x-1)$, что приведет к равенству $x+1 = (x-1)^2$ или $x^2 - 3x = 0$, т.е. имеем два корня $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Следует проверить, выполнены ли для них введенные ограничения. Для x_1 — нет, а для x_2 — да. Поэтому у исходного уравнения есть только один корень $x = 3$.

Тригонометрические уравнения и неравенства. В таких уравнениях и неравенствах неизвестное находится под знаком тригонометрической функции. Проведенные ранее рассуждения показывают, что в поисках решения следует стремиться упростить вид исходного уравнения или неравенства. Это часто удается сделать, применяя свойства элементарных функций, выражаемые теми или иными формулами (например, в последнем примере мы воспользовались формулой перехода для логарифмов). Для тригонометрических функций набор соответствующих формул оказывается особенно богатым. Ранее были приведены лишь немногие из них. Поэтому в первую очередь пополним их список.

Мы видели, что $\sin x$ и $\cos x$ можно истолковать как проекции на оси координат радиуса единичной окружности. Предположим, что рассматриваемый угол, который соответствует числу x , увеличен до угла, радианная мера которого $(x+y)$, т.е. осуществлен поворот радиуса. Нас интересует величина $\sin(x+y)$ и $\cos(x+y)$. Можно по-

казать, что координаты конца радиуса в результате поворота изменяются по формулам

$$\begin{cases} u = u' \cos y - v' \sin y; \\ v = u' \sin y + v' \cos y, \end{cases}$$

где u, v — координаты конца радиуса после поворота, т.е. $u = \cos(x+y)$ и $v = \sin(x+y)$, а u' и v' — его координаты до поворота, т.е. $u' = \cos x$, а $v' = \sin x$ (мы приведем доказательство этих формул в п. 5.1.2). Таким образом, получены важные формулы

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, из доказанных формул легко получаем, что

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}.$$

В частном случае, полагая $x = y$, получаем формулы

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Если воспользоваться основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

то делаем вывод о том, что $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, а если в последнюю формулу подставить вместо x число $\frac{x}{2}$, то

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Аналогично доказывается формула

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

Оказывается, что $\sin x$ и $\cos x$ можно выразить через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Эти формулы легко проверить, если подставить $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ и при-

менить предыдущие формулы.

Заметим, что, подставляя в предыдущие формулы вместо y число $(-y)$ и учитывая свойства четности косинуса и нечетности синуса, мы выводим формулы для косинуса и синуса разности двух чисел. Например, верно равенство

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x.$$

Если его сложить с равенством для $\sin(x + y)$, то возникает формула

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)],$$

которая может быть полезной в тех случаях, когда требуется преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму. Вот еще аналогичные формулы:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)];$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)].$$

Однако нередко требуется выполнить и обратный переход: преобразовать сумму двух тригонометрических функций в произведение. Это можно сделать на основе последних формул, правда, применять их будет удобнее, если вместо аргументов $(x + y)$ и $(x - y)$ будут стоять x и y . Выполнив соответствующую замену переменных (и их переобозначение), получим:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Подчеркнем: все приведенные равенства являются тождествами для всех значений переменных, для которых они определены.

Разумеется, что и расширенный доказанными формулами их набор оказывается неполным: в справочниках можно найти обширную дополнительную информацию. Некоторые формулы мы специально выделили. Их особенно полезно знать наизусть. Как станет ясно из дальнейшего, это существенно облегчает решение тригонометрических уравнений и неравенств, вычисление важных интегралов, решение дифференциальных уравнений и разнообразное прикладное использование тригонометрических функций.

Рассмотрим теперь некоторые приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Обратим внимание прежде всего на простейшие уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Первые два из них, очевидно, имеют решения лишь в случае $-1 \leq a \leq 1$, причем бесконечно много решений, поскольку тригонометрические функции периодические.

Для уравнения $\sin x = a$ при $|a| \leq 1$ часть решений можно найти из определения арксинуса:

$$x = \arcsin a + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Но это не все решения, как видно из графика синуса (рис. 55).

Есть еще последовательность решений, связанная с другой ближайшей к началу координат точкой пересечения прямой $y = a$ с гра-

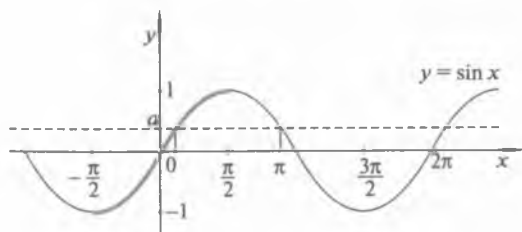


Рис. 55

фином синуса, которая симметрична первой относительно точки

$$x = \frac{\pi}{2};$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2m\pi, m = 0, \pm 1, \dots$$

или

$$x = -\arcsin a + (2m + 1)\pi.$$

Это решение следует объединить с обозначенными ранее, что можно сделать в единой формуле

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, n = 0, \pm 1, \dots$$

Аналогичные рассуждения, проведенные для уравнения $\cos x = a$, приводят к возможности записать все его решения формулой

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$$

Для уравнения $\operatorname{tg} x = a$ на число a не возникает ограничений, поскольку множество значений $\operatorname{tg} x$ охватывает всевозможные значения x . Учитывая, что наименьший период данной функции равен π , можем записать все решения данного уравнения в виде

$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi, n = 0, \pm 1, \dots$$

Ясно, что проблема решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ сводится к предыдущему случаю: уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Решение соответствующих простейших неравенств использует аналогичные рассуждения и свойства тригонометрических функций (их монотонность на разных промежутках, область определения, периодичность). Например, при $0 < a \leq 1$ решение неравенства $\sin x > a$ сводится к нахождению упомянутых выше двух ближайших к началу координат решений: $\arcsin a$; $\pi - \arcsin a$ и записи всех решений (с учетом периодичности синуса) в виде последовательности промежутков:

$$\arcsin a + 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$$

Аналогично для неравенства $\operatorname{tg} x < a$ имеем

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \operatorname{arctg} a + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$$

Тригонометрические уравнения и неравенства более сложного вида стремятся свести к простейшим тригонометрическим или алгебраическим уравнениям и неравенствам. Для этого чаще всего используют формулы, о которых шла речь ранее, и замену переменной.

Если, например, уравнение имеет вид $f(\sin x) = 0$, то замена $y = \sin x$ преобразует его к виду $f(y) = 0$. И тогда для каждого решения y_0 последнего уравнения возникает множество решений уже рассмотренного ранее простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = y_0$.

Теоретически более сложный случай уравнения вида $f(\sin x, \cos x) = 0$ тоже можно свести к некоторому уравнению с одной переменной, если положить $y = \sin x$ и, следовательно, $\cos x = \pm \sqrt{1 - y^2}$. Однако при такой подстановке чаще всего возникают иррациональные уравнения (т.е. содержащие корни). Решать их обычно сложнее, чем алгебраические. Поэтому полезно иметь в виду, что замена синуса и косинуса их выражениями через тангенс половинного угла сама по себе не привносит иррациональности в уравнение.

В практике решения тригонометрических уравнений вида $f(x) = 0$ часто оказывается полезным уже упоминавшийся прием разложения левой части на множители, т.е. преобразования уравнения к виду $f_1(x)f_2(x) = 0$. Рассмотрим, например, уравнение

$$\sin 3x + \sin x - \cos x = 0.$$

Используя формулу для суммы синусов, перепишем его в виде

$$2 \sin 2x \cdot \cos x - \cos x = 0,$$

т.е. $\cos x (2 \sin 2x - 1) = 0$. Поэтому следует объединить решения двух уравнений: $\cos x = 0$ и $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Для первого — это последо-

вательность точек $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), а для второго —

$$x = \frac{1}{2} \left[(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \right] \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

5.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Числовые множества, рассмотренные ранее, конечно, не исчерпывают всего разнообразия множеств, которые специально изучаются в математике с тем, чтобы введенные в них структуры можно было эффективно использовать в математических моделях объектов и явлений окружающего мира.

В данной главе будут рассмотрены частные случаи множеств, которые в современной алгебре называют линейными или векторными пространствами. Их элементы в общем случае не являются числами, но тем не менее с ними возможно осуществлять определенные операции, в чем-то аналогичные операциям сложения и умножения для чисел, а в чем-то, быть может, существенно от них отличающиеся.

В первую очередь обратим внимание на геометрические множества точек, т. е. попытаемся описать абстрактные модели окружающего человека реального (трехмерного) пространства и более простых его аналогов (двумерного и одномерного). Наделить эти множества нужной структурой удастся благодаря установлению взаимосвязи его элементов с наборами чисел путем введения той или иной *системы координат*. Математическая суть введения любой системы координат — это определенный способ построения взаимно-однозначного соответствия между множеством точек пространства и наборами чисел (обычно с некоторыми ограничениями). Богатство возможных операций с числами позволяет определить и правила действий с такими наборами. Некоторые из таких действий допускают содержательное истолкование и в терминах исходных геометрических мно-

жеств. Они-то и представляют наибольший интерес для математического исследования.

Далее мы используем эту идею для множества *векторов* из тех же геометрических пространств. Из последующего описания понятия вектора нетрудно будет усмотреть, что это простейшее преобразование пространства, а именно — параллельный перенос. Поэтому математическое понятие вектора оказывается чрезвычайно эффективным аппаратом описания геометрических фактов и законов физики.

В более общем, алгебраическом, смысле *линейным векторным пространством* называется множество L элементов любой природы, для любых двух элементов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ которого определена сумма $\bar{a} + \bar{b} \in L$ и для каждого элемента $\bar{a} \in L$ и действительного числа α определено произведение $\alpha\bar{a} \in L$ с соблюдением нескольких аксиоматических условий. Мы не будем приводить их полный перечень, а укажем лишь ради создания самых общих представлений, что речь идет о коммутативности и ассоциативности сложения, существовании нулевого и противоположного элементов и нескольких естественных правил умножения элемента на число.

Конструкции, связанные с комбинациями операций сложения и умножения элементов на число, называют *линейными*. Из предыдущего ясно, что среди всевозможных преобразований (отображений) векторных пространств именно линейные преобразования заслуживают первоочередного рассмотрения.

5.1.1. Понятие о системах координат

Мы уже видели, что на прямой система координат вводится указанием взаимно-однозначного соответствия ее точек множеству действительных чисел, которое возникает после указания начала координат, положительного направления и единичного отрезка. В итоге геометрическая прямая превращается в числовую ось. *Координатой* каждой точки называют действительное число, ей сопоставленное. Расстояние между любыми двумя точками a и b определяется величиной $|b - a|$.

Такую систему координат часто характеризуют указанным на рис. 56 направленным отрезком $\bar{i}$ (в дальнейшем с этим отрезком мы связываем так называемый *единичный вектор*, или *орт*).

Для указания положения точки на плоскости одной числовой осью не



Рис. 56

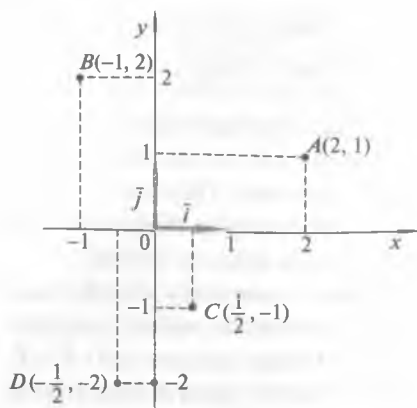


Рис. 57

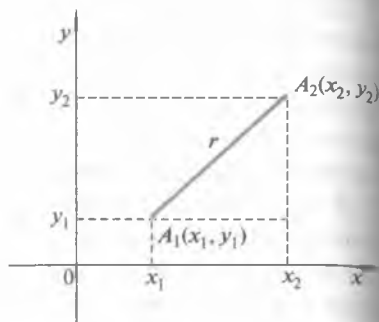


Рис. 58

обойтись, но достаточно взять две числовые оси, расположенные, например, перпендикулярно друг другу (рис. 57).

Возникает так называемая *декартова прямоугольная система координат*. Заметим, что масштабы на осях координат Ox (она называется *осью абсцисс*) и Oy (она называется *осью ординат*) могут быть одинаковыми или разными. Точкам плоскости взаимно-однозначно соответствуют пары чисел (x, y) , называемых ее *координатами*.

Расстояние между двумя точками на плоскости $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ определяется формулой

$$r(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Это очевидно из теоремы Пифагора (рис. 58).

Вместо того чтобы к оси Ox добавлять еще одну числовую ось, можно однозначно определить положение точки A на плоскости другим способом: указать направление на A из точки O с помощью угла φ (рис. 59) и расстояние r от точки O до A .

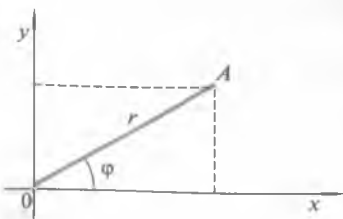


Рис. 59

Числа r и φ называются *полярными координатами точки A*; r — полярный радиус; φ — полярный угол. Соответствие $A \leftrightarrow (r, \varphi)$ не является взаимно-однозначным, так как для точки O полярный угол не определен, а парам (r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi)$ соответствует одна и та же точка. Поэтому обычно устанавливают ограничение:

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Связь полярных координат с декартовыми определяется очевидными формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Для множества точек трехмерного пространства потребуется использовать уже тройки чисел (координат). Взяв три взаимно перпендикулярные оси с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, получаем *декартову прямоугольную систему координат для трехмерного пространства*. Дополнительная ось Oz называется *осью аппликат*. Заметим, что существуют две различные конфигурации таких ортов, определяющие соответственно *левую* (рис. 60) и *правую* (рис. 61) системы координат.

Условимся использовать в дальнейшем только правую систему.

Каждая пара координатных осей определяет координатную плоскость: в совокупности они разбивают все пространство на 8 октантов.

Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ определяется формулой

$$r(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Иногда для плоскости xOy фиксируют полярную систему координат и добавляют координату z , связанную с осью Oz . Возникает так называемая *цилиндрическая система координат* для трехмерного пространства. Существуют и другие системы координат.

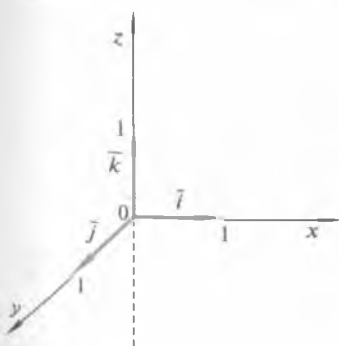


Рис. 60

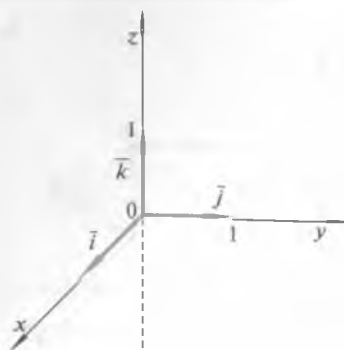


Рис. 61

* 5.1.2. Преобразования координат

Предположим, что тип системы координат выбран (декартова, полярная или др.). Однако этим еще не исчерпана вся свобода выбора: можно, например, изменять начало координат, расположение оси Ox . При этом одна и та же точка пространства будет изменять свои координаты. В итоге конкретное множество точек пространства (т.е. фигура) может оказаться представленным более простыми или более сложными соотношениями координат (уравнения, неравенства и т.п.). Таким образом, преобразования системы координат могут выступить в роли математического инструмента исследования фигур.

Простейший класс преобразований — линейные. Мы рассмотрим их для декартовой системы координат на плоскости. Обозначим буквами x, y координаты точки M в старой (исходной) системе координат, а x' и y' — в новой (рис. 62).

В общем виде линейная связь между ними задается формулами

$$x = a_0 + a_1 x' + a_2 y';$$

$$y = b_0 + b_1 x' + b_2 y'.$$

Рассмотрим важные частные случаи такой связи. Пусть

$$\begin{cases} x = a_0 + x'; \\ y = b_0 + y'. \end{cases}$$

Ясно, что в этом случае новые координаты любой точки M отличаются от старых на постоянные величины a_0 и b_0 . Такое преоб-

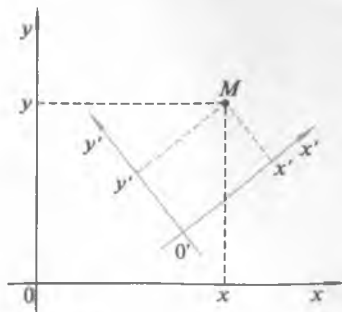


Рис. 62

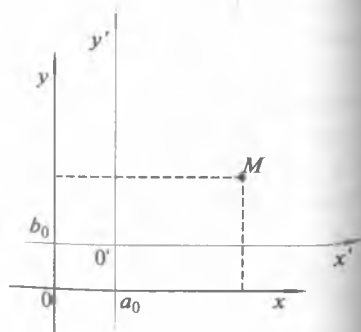


Рис. 63

преобразование называется *параллельным переносом* (рис. 63). При $b_0 = 0$ происходит параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси Ox , при $a_0 = 0$ — вдоль оси Oy .

Пусть

$$\begin{cases} x = a_1 x'; \\ y = b_2 y' \end{cases}$$

и для простоты $a_1 > 0$, $b_2 > 0$. Тогда координата x любой точки M изменяется в a_1 раз, а координата y — в b_2 раз. Это *преобразование растяжения*. Если $b_2 = 1$, то растяжение происходит только вдоль оси Ox , а при $a_1 = 1$ — только вдоль оси Oy . В частном случае, когда $a_1 = b_2 = k$, данное преобразование называется *гомотетией* с коэффициентом k . При гомотетии длина любого отрезка (и расстояние между любыми двумя точками M_1 и M_2) изменяется в k раз.

Рассмотрим теперь *поворот системы координат* (рис. 64) на угол φ . Для простоты ограничимся случаем $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (для других промежутков рассуждения проводятся аналогично). Заметим, что $x = |OA| = |OB| - |AB|$, $y = |AM| = |AC| + |CM|$ и $\angle AOD = \angle CMD = \varphi$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Далее $|OB| = x' \cos \varphi$; $|AB| = |CD| = y' \sin \varphi$; $|AC| = |DB| = x' \sin \varphi$; $|CM| = y' \cos \varphi$.

Поэтому

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi; \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{cases}$$

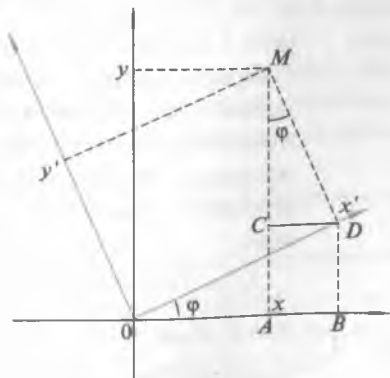


Рис. 64

Это и есть формула изменения координат точки при повороте системы координат на угол φ .

Часто рассматривают комбинации приведенных ранее преобразований; в случае, когда это комбинация параллельного переноса, гомотетии и поворота, говорят о преобразовании *подобия*. При этом прямолинейные отрезки преобразуются в прямолинейные отрезки, углы между ними не изменяются, а длины изменяются в соответствии с коэффициентом гомотетии.

Аналогичные преобразования можно определить и для трехмерного пространства.

* 5.1.3. Построение графиков функций методом преобразования

Пусть уже известен вид графика функции $y = f(x)$. Ставится задача построить график функции $y = a \cdot f(bx + c) + d$, где a, b, c, d — фиксированные числа.

Для ее решения полезно воспользоваться описанными в подразд. 5.1.2 идеями преобразования системы координат.

В самом деле, запишем формулу для функции в виде $y = a \cdot f\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] + d$. Тогда становится очевидным, что ее график будет отличаться от графика функции $y = a \cdot f\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$ сдвигом вдоль оси Oy на величину d (если $d > 0$, то график поднимется вверх на d , если $d < 0$, то опустится вниз на $|d|$).

Коэффициент a показывает, что происходит растяжение графика

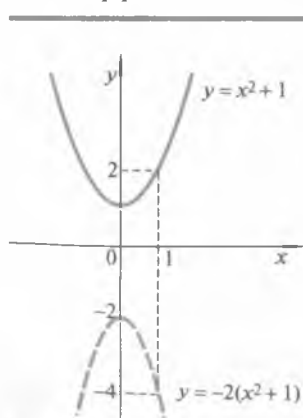


Рис. 65

$y = f\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$ вдоль оси Oy в $|a|$ раз (при $|a| < 1$ на самом деле происходит сжатие). При этом, если $a < 0$, дополнительно происходит преобразование симметрии относительно оси Ox (пример на рис. 65, исходный график изображен сплошной линией, а преобразованный — штриховой).

Сравнивая графики функции $y = f\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$ и функции $y = f(bx)$, замечаем, что первый отличается от второго сдвигом вдоль оси Ox на величину

$\left(-\frac{c}{b}\right)$. Действительно, если вторая функция принимает какое-то значение y_0 в точке x_0 , то первая имеет то же значение в точке x' , удовлетворяющей равенству $x' + \frac{c}{b} = x_0$, т.е. $x' = x_0 - \frac{c}{b}$.

Аналогично обнаруживаем, что смысл коэффициента b — растяжение вдоль оси Ox с коэффициентом $\frac{1}{b}$. Если,

например, $b = 2$, то происходит сжатие в два раза при условии, что мы переходим от графика $y = f(x)$ к графику $y = f(bx)$.

Ясно, что при $b < 0$ происходит дополнительное преобразование симметрии относительно оси Oy , поскольку роли положительных значений x и отрицательных при вычислении значений функции меняются на противоположные (см. пример на рис. 66).

В общем случае построения графика $y = a \cdot f\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] + d$ на основе графика $y = f(x)$ следует выполнить последовательность описанных ранее частных случаев преобразований со строгим соблюдением их порядка:

- 1) производим растяжение вдоль оси Ox в соответствии с коэффициентом $\frac{1}{b}$;
 - 2) осуществляем сдвиг вдоль оси Ox на величину $\left(-\frac{c}{b}\right)$;
 - 3) производим растяжение вдоль оси Oy с коэффициентом a ;
 - 4) выполняем сдвиг вдоль оси Oy на величину d .
- Пусть, например, требуется построить график функции

$$y = \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x.$$

Эту задачу можно было бы решить методом сложения графиков: построить на одном чертеже графики $y_1 = \cos 3x$ и $y_2 = \sqrt{3} \sin 3x$, а затем для достаточно большого набора избранных значений x найти геометрическим сложением отрезков суммы $y_1 + y_2$, т.е. отдельные точки искомого графика. Но мы воспользуемся другим приемом.

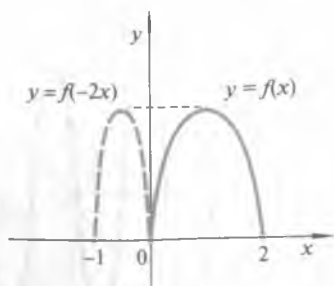


Рис. 66

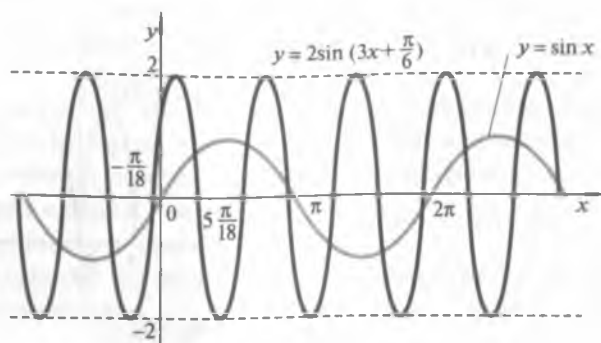


Рис. 67

Имеем

$$\begin{aligned}
 y &= \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = \\
 &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} \sin 3x \right) = \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos 3x + \cos \frac{\pi}{6} \sin 3x \right) = \\
 &= 2 \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \left[3 \left(x + \frac{\pi}{18} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Теперь замечаем, что график данной функции может быть получен из графика функции $y = \sin x$ следующими преобразованиями: сжатием вдоль оси Ox в три раза, сдвигом полученного графика влево на $\frac{\pi}{18}$, растяжением вдоль оси Oy в два раза (рис. 67).

5.2. ВЕКТОРЫ

Будем рассматривать на плоскости или в трехмерном пространстве отрезки прямых AB , один из концов которых называется *началом* A , а другой — *концом* B . Ясно, что каждый из таких отрезков характеризуется длиной $|\overline{AB}|$ и направлением.

Объединим в один класс все отрезки, имеющие одинаковую длину и одно и то же направление, т.е. все направленные отрезки, которые могут быть преобразованы друг в друга параллельным переносом (рис. 68). Каждый из таких классов называют *вектором*. Иногда говорят — *свободным вектором*, желая подчеркнуть, что выбор начала A для направленного отрезка — представителя вектора — безразличен. Обычно в качестве представителя выбирают отрезок с началом в точке O , т.е. начале координат.

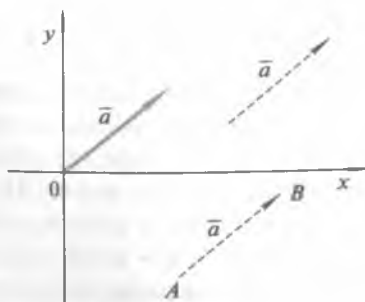


Рис. 68

Векторы изображают направленными отрезками и обозначают так же, как направленные отрезки: $\overline{AB}$ или $\overline{AB}$, или с использованием одной малой буквы: $\vec{a}$ или $\vec{a}$. Длина вектора обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Вектор, длина которого равна 1, называется *ортом*. Чаще всего рассматривают орты для координатных осей, и направление орта совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси. В трехмерном пространстве стандартное обозначение ортов: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым*; направление нулевого вектора не определяется.

Векторы, имеющие одинаковое направление (но, возможно, разную длину), называются *коллинеарными*, а лежащие в одной плоскости — *компланарными*.

Векторы можно рассматривать, не связывая их с какой-либо системой координат. Но если она введена, то появляется возможность рассматривать *проекции* вектора на координатные оси. Если, например, на плоскости вектор задан началом $A(x_1, y_1)$ и концом $B(x_2, y_2)$, то проекция вектора на ось Ox равна $(x_2 - x_1)$, а на ось Oy , аналогично, $(y_2 - y_1)$. Ясно, что параллельный перенос не изменяет указанных проекций, т.е. проекции можно вычислить для любого конкретного направленного отрезка, представляющего данный вектор.

Из теоремы Пифагора следует, что длина вектора на плоскости может быть вычислена по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Аналогично в пространстве

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(поскольку $|\vec{a}|$ совпадает с длиной диагонали прямоугольного параллелепипеда, образующие которого: $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$, $|z_2 - z_1|$).

Введя в рассмотрение угол α (рис. 69), замечаем, что проекция вектора $\vec{a}$ на ось Ox равна $|\vec{a}| \cos \alpha$, а на ось Oy : $|\vec{a}| \sin \alpha$ или $|\vec{a}| \cos \beta$. Величины $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ называют *направляющими косинусами*. Очевидно: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$. Аналогично в трехмерном пространстве направляющие косинусы вектора связаны соотношением $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, где α , β , γ — углы, которые вектор образует с осями координат.

Понятно, что совокупность проекций вектора на все координатные оси однозначно определяет вектор. Поэтому векторы на плоскости можно отождествлять с парами чисел (x, y) , а в пространстве — с тройками: (x, y, z) . Можно даже рассматривать векторы (в n -мерном пространстве), заданные наборами из n чисел: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для векторов вводятся некоторые операции. Прежде всего, сложение: на рис. 70 показано, как возникает сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (читатель легко сформулирует соответствующее текстовое определение — правило).

Тот же результат суммирования возникает, если воспользоваться правилом параллелограмма (рис. 71).

Векторы можно вычитать: разностью $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$. На рис. 72 показано, как геометрически изобразить разность векторов. Сложение векторов *коммутативно*, т. е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, и *ассоциативно*, т. е. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

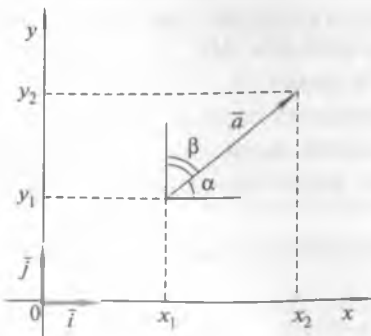


Рис. 69

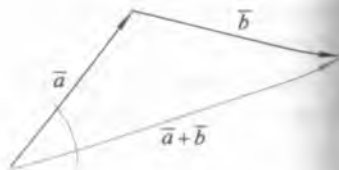


Рис. 70

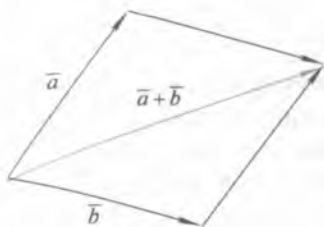


Рис. 71

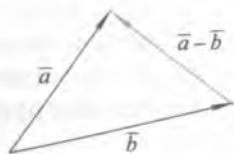


Рис. 72

Векторы можно умножать на действительное число: произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, длина которого $|\lambda||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное, если $\lambda < 0$.

На основе введенных операций можно выражать одни векторы через другие. В частности, любой вектор представим в виде линейной комбинации ортов для координатных осей. На плоскости такое разложение вектора имеет вид $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, а в пространстве — $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. При этом числа x, y, z оказываются проекциями вектора на координатные оси, т.е. это координаты вектора.

Введенные ранее операции сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют всем требованиям, которые предусматриваются аксиомами линейного пространства. Однако для множества векторов на плоскости и в трехмерном пространстве можно существенно обогатить структуру, определив еще несколько операций, называемых *произведением векторов*.

Первая из них называется *скалярным произведением*. Термин «скалярное» означает, что в результате перемножения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получается число $(\vec{a}\vec{b})$, которое по определению равно $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Иногда скалярное произведение обозначают символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Из определения очевидно, что скалярное произведение векторов оказывается равным произведению длины одного из них на проекцию другого вектора на ось, определяемую первым вектором.

Скалярное произведение коммутативно: $(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a})$; числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения: $(\lambda\vec{a}\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\lambda\vec{b})$ и верно равенство, связанное с суммами векторов: $((\vec{a} + \vec{b})\vec{c}) = (\vec{a}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{c})$.

Рассмотрим несколько примеров и частных случаев.

Если вектор $\vec{a}$ умножить скалярно на себя, то, учитывая, что $\varphi = 0$ и поэтому $\cos \varphi = 1$, получим $(\vec{a}\vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

Если два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos \varphi = 0$, то $(\bar{a}\bar{b}) = 0$. Верно и обратное утверждение. Таким образом, обращение в нуль скалярного произведения — это признак взаимной перпендикулярности (ортогональности) двух векторов.

В частности, для ортов имеем: $(\bar{i}\bar{i}) = 1$; $(\bar{i}\bar{j}) = 0$; $(\bar{i}\bar{k}) = 0$; $(\bar{j}\bar{k}) = 0$ и т. п.

Предположим теперь, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ представлены своими разложениями по ортам: $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ и $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$. Тогда, учитывая предыдущие свойства, после перемножения разложений находим

$$(\bar{a}\bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

В частности, *признак ортогональности векторов*, заданных своими координатами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, выглядит так:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Попутно заметим, что если два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, где λ — некоторое число. Значит, аналогичные равенства будут верны и для координат вектора: $x_1 = \lambda x_2$; $y_1 = \lambda y_2$; $z_1 = \lambda z_2$. Поэтому

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Это *признак коллинеарности* двух векторов, заданных своими координатами. В этой записи столько уравнений, сколько знаков равенства, т. е. два. А сама запись требует некоторых оговорок. Дело в том, что какие-то координаты вектора могут оказаться нулями, например $y_2 = 0$ и (или) $z_2 = 0$, но хотя бы одна координата отлична от нуля (иначе вектор был бы нулевым). Но делить на нуль нельзя. Поэтому ради сохранения единой простой записи условия коллинеарности примем следующее условие: если какой-то знаменатель обратился в нуль, то это означает обращение в нуль и соответствующего числителя. Например, вектору $(x_1, y_1, 0)$ может быть коллинеарен только вектор $(x_2, y_2, 0)$.

Предположим, возникает задача найти *угол между двумя векторами*. Это легко сделать с помощью скалярного произведения:

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{a}\bar{b})}{|\bar{a}| |\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

и, зная косинус, можно найти φ через арккосинус соответствующего числа.

Другая разновидность произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — так называемое *векторное произведение* $[\vec{a}\vec{b}]$, результатом которого является вектор, определенный следующими условиями:

- а) длина вектора $[\vec{a}\vec{b}]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- б) вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен в ту сторону, с которой поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути виден против хода часовой стрелки (рис. 73).

Иногда векторное произведение обозначают символом $\vec{a} \times \vec{b}$. Укажем в качестве примера, что $[\vec{i}\vec{j}] = \vec{k}$; $[\vec{j}\vec{i}] = -\vec{k}$; $[\vec{j}\vec{k}] = \vec{i}$ и т. д. (рис. 74).

Для коллинеарных векторов такое произведение будет равно нулевому вектору (так как $\varphi = 0$). В частности, $[\vec{i}\vec{i}] = [\vec{j}\vec{j}] = [\vec{k}\vec{k}] = 0$.

Ясно, что векторное произведение не является коммутативным: при изменении порядка перемножаемых векторов произведение меняет знак:

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}].$$

Если векторы заданы в координатной форме, то, пользуясь свойством векторного произведения, нетрудно получить формулу

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}] &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times \\ &\quad \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + \\ &\quad + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}. \end{aligned}$$

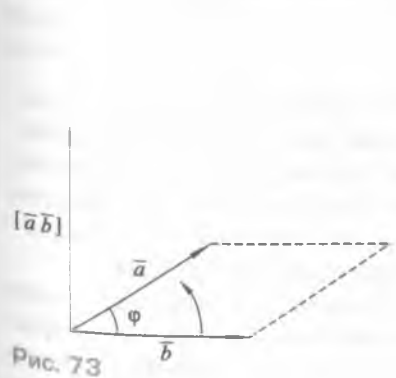


Рис. 73

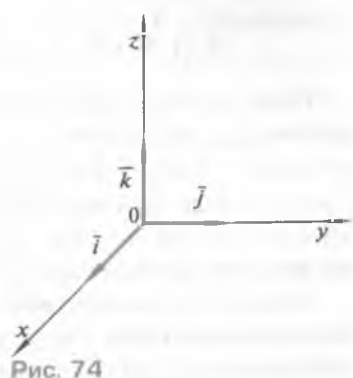


Рис. 74

Несколько опережая логику проводимых рассуждений, заметим, что эту формулу легко запомнить, если воспользоваться специальной записью ее в виде так называемого *определителя*:

$$[\bar{a}\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(смысл такой записи будет разъяснен в подразд. 5.3.3).

Иногда используют и еще один вид произведения векторов — *смешанное*, которое является комбинацией скалярного и векторного произведений для тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = ([\bar{a}\bar{b}]\bar{c})$.

Укажем без доказательства, что в терминах смешанного произведения удобно сформулировать *признак компланарности* трех векторов (т.е. расположенных в одной плоскости): $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c}(x_3, y_3, z_3)$.

Мы снова употребили запись определителя, как выяснится далее (см. подразд. 5.3.3), весьма удобную.

5.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АППАРАТ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.3.1. Матрицы

Ранее были рассмотрены некоторые нечисловые множества, наделенные достаточно богатой структурой, для того, чтобы эффективно использовать ее в математических моделях: точки пространства, представимые благодаря введению системы координат в виде наборов чисел, и векторы — объекты, которые характеризуются комбинацией числовой характеристики (длина вектора) и направления.

Сравним с ними по значению в математике еще одно множество, элементами которого являются так называемые матрицы. Структуры, которыми наделено это множество, оказываются очень удобным

аппаратом решения ряда алгебраических задач, в частности решения систем линейных уравнений.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая

из m строк и n столбцов:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ее элементы — числа a_{ij} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Здесь первый индекс i указывает номер строки, в котором расположен элемент, а j — номер столбца. Числа m и n указывают *размер* матрицы.

Например, в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ две строки и три столбца; $a_{12} = a_{23} = 0$; $a_{11} = a_{22} = 1$; $a_{13} = 3$; $a_{21} = 2$.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Например,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица размера 3.

Матрицы можно умножать на число (умножая все элементы матрицы на это число). Матрицы одинакового размера можно складывать (суммируя элементы с одинаковыми индексами). Однако данными операциями не ограничиваются возможности структурирования множества матриц: для некоторых классов матриц (например, квадратных с одинаковым размером) вводится понятие их произведения; результатом является некоторая матрица (в случае квадратной матрицы — того же размера). Ее элементы находятся по довольно сложному правилу (которое здесь не рассматриваем). Произведение матриц оказывается некоммутативным, т.е. в общем случае $AB \neq BA$.

Вводится понятие *обратной матрицы* A^{-1} к данной квадратной матрице A . Основное ее свойство: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

У матрицы E по диагонали стоят единицы, а все остальные элементы — нули. Свойство единичной матрицы: $EA = AE = A$.

Обратная матрица A^{-1} существует для любой квадратной матрицы A , если она невырожденная (см. подразд. 5.3.3). И существуют алго-

- найти единственное решение, если оно существует;
 - указать способ нахождения любого числа решений, если их существует бесконечно много;
 - выяснить, что решений не существует, если их на самом деле нет.
- Оказывается, что иных ситуаций, кроме трех перечисленных, для линейных систем быть не может.

Суть метода Гаусса. Из первого уравнения системы выражаем одну переменную через остальные. Это всегда возможно, если в левой части уравнения есть хотя бы один член с коэффициентом, отличным от нуля. Если такового нет, то возникает либо противоречие при условии $b_1 \neq 0$, и, значит, система решений не имеет, либо тождественное равенство $0 = 0$, которое можно исключить из рассмотрения.

Подставляем эту переменную во все остальные равенства, которые образуют линейную систему с меньшим числом переменных. Для этой системы повторяем описанную выше процедуру и так далее, сокращая на каждом шаге число рассматриваемых переменных.

Ясно, что на каком-то шаге может возникнуть противоречивое равенство. Тогда делаем вывод: исходная система решений не имеет.

Может случиться, что на последнем шаге возникнет равенство вида $sx_i = b$, где $s \neq 0$, а x_i — какая-то из переменных. Из него можно найти единственное значение x_i . Из равенства, возникшего на предпоследнем шаге, находится единственное значение еще одной переменной, и так далее находятся единственные значения всех переменных. В этом случае исходная система имеет единственное решение.

Наконец, возможен случай, когда на последнем шаге возникло линейное уравнение, в котором есть несколько переменных с коэффициентами, отличными от нуля. Одну из этих переменных можно выразить через остальные (их называют свободными). Придавая последним **любые фиксированные значения**, можно повторить описанную выше процедуру нахождения значений остальных переменных. Ясно, что у такой системы бесконечно много решений, любое число которых может быть найдено путем фиксирования произвольных конкретных значений свободных переменных.

Поясним метод Гаусса примерами:

$$1) \begin{cases} x + 2y + z = -1; \\ 2x + 7y - z = 4; \\ 3x - 5y + 2z = -1. \end{cases}$$

Подставляя выражение x через остальные переменные во второе и третье уравнения, записываем систему в виде

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1; \\ y - z = 2; \\ -11y - z = 2. \end{cases}$$

Находим y из второго уравнения и подставляем в третье:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1; \\ y - z = 2; \\ -12z = 24, \end{cases}$$

т.е. $z = -2$ и тогда (из второго уравнения) $y = 0$ и, наконец (из первого уравнения): $x = 1$. Система имеет единственное решение.

$$2) \begin{cases} x + 2y + z = -1; \\ 2x + 4y + 2z = 1; \\ 3x - 5y + 2z = -1. \end{cases}$$

Подставляя выражение x во второе уравнение, замечаем, что оно предстает в виде $-2 = 1$. Возникло противоречивое равенство, т.е. система не имеет решений.

$$3) \begin{cases} x + 2y + z = -1; \\ 2x + 4y + 2z = -2; \\ 3x - 5y + 2z = -1. \end{cases}$$

Рассуждая по прежней схеме, преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1; \\ 0 = 0; \\ -11y + z = 2, \end{cases}$$

т.е. исходная система эквивалентна

$$\begin{cases} x = -1 - 2y - z; \\ -z = 2 + 11y. \end{cases}$$

Переменная y — свободная, придав ей любое значение (например $y = 0$), находим решение системы ($y = 0$, $z = 2$, $x = -3$). Исходная система имеет бесконечно много решений.

5.3.3. Определители

Для квадратных матриц вводится понятие *определителя*. Определитель матрицы A — это число, обозначаемое $|A|$, или в более под-

робной записи $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, которое находится по следующему правилу:

- если матрица A содержит всего один элемент a_{11} , то $|a_{11}| = a_{11}$, т. е. ее определитель совпадает с данным элементом;
- если размер матрицы A равен n , то ее определитель можно вычислить в виде линейной комбинации n определителей $(n-1)$ -го порядка

$$a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n},$$

где A_{1i} — определитель матрицы, которая возникнет, если из матрицы A вычеркнуть первую строку и i -й столбец.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

Здесь $|a_{22}|$ — определитель матрицы (a_{22}) и $|a_{21}|$ — определитель матрицы (a_{21}) .

Аналогично

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Заметим, что определитель второго порядка вычисляется как разность произведений элементов по диагоналям матрицы, а члены определителя третьего порядка можно выписать по схеме, обозначенной на рис. 75.

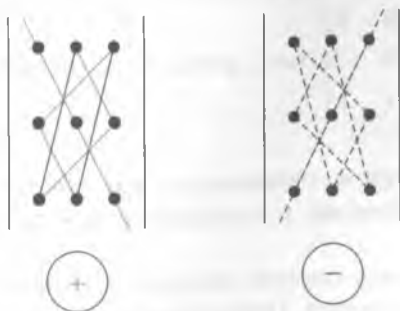


Рис. 75

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 3 = \\ = 6 - 2 = 4.$$

Можно доказать, что определители обладают следующими *свойствами*:

- определитель не меняется, если его строки заменить столбцами с соответствующими номерами. Соответствующая операция для

матриц называется *транспонированием*. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}. \text{ Таким образом, в отношении перечисленных ниже}$$

свойств определителя его строки и столбцы «равноправны»;

- при перестановке двух строк (столбцов) местами определитель меняет знак на противоположный;
- если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю;
- общий множитель элементов некоторой строки определителя можно выносить за знак определителя;
- определитель, имеющий строку, состоящую из одних нулей, равен нулю;
- определитель не изменится, если к любой его строке прибавить линейную комбинацию остальных его строк. Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ (мы добавили к первой строке вторую, умноженную на } -2 \text{).}$$

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называют *невырожденной*, и *вырожденной* — в противоположном случае.

Пусть теперь дана система линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Тогда существует метод ее решения по так называемому *правилу Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Здесь $\Delta \neq 0$ — определитель матрицы системы, Δ_{x_1} — определитель матрицы, которая возникает из матрицы системы, если первый ее столбец заменить столбцом свободных членов. Аналогично для Δ_{x_2} , Δ_{x_3} . Эти правила мы приводим без доказательства.

Таким образом, при $\Delta \neq 0$ линейная система имеет единственное решение. Например, для системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{определитель}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 2 = 3 \neq 0. \text{ Поэтому ее решение единственно:}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}; \quad x_3 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все $b_i = 0$ (т.е. столбец свободных членов состоит из одних нулей). Если хотя бы одно $b_i \neq 0$, то система называется *неоднородной*.

У однородной системы одно решение заведомо существует: $x_i = 0$ для $i = 1, \dots, n$. Такое решение называют тривиальным. Из предыдущего ясно, что нетривиальные решения у такой системы будут существовать только при условии $\Delta = 0$.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

6.1. ПОНЯТИЕ О СТЕРЕОМЕТРИИ

С древних времен геометрия изучала свойства реального пространства или, в современной терминологии, его структуры. Первоначально источником геометрических сведений был опыт человека, но постепенно дедуктивные методы становились преобладающими: в геометрии начали господствовать, по сути, аксиоматические определения основных понятий, логический вывод, доказательства. В результате возникла геометрия, называемая евклидовой (по имени греческого ученого Евклида — III в. до н.э.), которая описывает свойства фигур на плоскости и в трехмерном пространстве, вполне согласуясь с опытом человека.

Однако опыт ограничен и не определяет однозначно исходных математических структур, на которых может строиться геометрия. Например, математическая прямая бесконечна, но человеку всегда доступно рассмотрение лишь конечного промежутка ее реального аналога; математическая линия не имеет ширины в отличие от любой своей реальной модели и т.д. Поэтому, варьируя систему исходных аксиом, возможно строить различные геометрии, отличные от евклидовой. Они тоже могут не противоречить опыту, например, по той причине, что на относительно небольших областях пространства мало отличаются от геометрии Евклида. И более того, именно неевклидовы геометрии часто оказываются адекватными закономерностям строения отдельных подсистем реального мира (например, в условиях микромира, особо сильных магнитных или гравитационных полей, при рассмотрении фигур на некоторых поверхностях, скажем на сфере). Поэтому современная геометрия предстает в богатом много-

образии теорий, различных интерпретаций и средств используемого математического аппарата.

В данной главе речь пойдет в основном о евклидовой геометрии, которая интерпретируется в терминах описанного ранее метода координат и векторов. Соответствующий раздел математики обычно называют аналитической геометрией. Ее специфика в том, что геометрические фигуры (прямые, плоскости, линии и т.д.) представляются в виде аналитических соотношений между переменными, т.е. числовыми функциями, уравнениями, неравенствами и их системами. В результате все богатство взаимосвязей оперирования такими соотношениями может быть использовано для исследования свойств соответствующих им фигур.

При аксиоматическом определении аналитической геометрии в качестве первичных объектов рассматриваются точки, прямые и плоскости. Первичные свойства и взаимосвязи этих объектов задаются аксиомами. В школьном курсе математики такие аксиомы уже рассматривались по отношению к фигурам на плоскости. Этот раздел геометрии называют планиметрией. Напомним лишь, что можно выделить несколько групп таких аксиом:

1) *аксиомы связи*, которые определяют соотношения между первичными объектами (например, «для любых двух точек A и B существует прямая, проходящая через каждую из точек A и B » или «существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой»);

2) *аксиомы порядка*, которые определяют взаимоотношения между несколькими точками, расположенными на прямой (например, типа «лежит между»: «каковы бы ни были точки A и C , существует по крайней мере одна точка B на прямой AC , такая, что C лежит между A и B »);

3) *аксиомы конгруэнтности (равенства)*, которые формулируются по отношению к отрезкам (фигурам, которые определяются парой точек на прямой): например, «каждый отрезок может быть однозначно отложен на любой прямой по любую данную сторону от любой ее данной точки»;

4) *аксиомы непрерывности* (их варианты рассматривались в подразд. 2.5);

5) *аксиома параллельности*, суть которой в утверждении, что существует только одна прямая, параллельная данной и проходящая через данную точку.

В строгих математических теориях показано, что все известные факты планиметрии — геометрии Евклида для плоскости — могут

быть получены как логические следствия указанной системы аксиом. Заметим также, что известно несколько эквивалентных вариантов такой аксиоматики.

Обратим внимание на аксиому параллельности. Оказывается, что если присоединить к остальным аксиомам ее отрицание, то возникнет непротиворечивая аксиоматика, определяющая так называемую геометрию Лобачевского (по имени впервые открывшего ее в середине XIX в. Н. И. Лобачевского). Эта геометрия математически столь же безупречна, как и геометрия Евклида, и находит прикладное использование, например, в моделировании микромира и теории относительности при исследовании взаимосвязей пространства и времени. Реализуется ли она в окружающем человека трехмерном пространстве — вопрос открытый, поскольку, как показывают некоторые астрономические расчеты, различия в вычислениях по ее формулам и формулам евклидовой геометрии меньше точности существующих измерительных приборов.

Многие положения геометрии Лобачевского поистине удивительны. Например, сумма углов треугольника всегда меньше 180° ; подобные треугольники обязательно равны; две прямые, имеющие общий перпендикуляр, не являются параллельными, а расходятся друг от друга, как искривленные линии.

Существуют и другие неевклидовы геометрии. Упомянем, например, геометрию Римана, которая реализуется на сфере. Аксиоматика этой геометрии отличается от евклидовой аксиоматики еще одной аксиомой: через две различные точки может проходить более одной прямой. Заметим, что роль прямых на сфере играют большие (диаметральные) окружности — они пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы. Сумма углов треугольника в этой геометрии больше 180° .

Обратимся теперь к геометрии трехмерного пространства, или к *стереометрии*. Здесь возникает еще один класс первичных объектов — плоскости. Аксиоматика стереометрии состоит из тех же классов аксиом, что и для планиметрии. Однако набор аксиом в некоторых классах расширяется. Основная суть добавленных свойств состоит в следующих положениях:

- а) какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей;
- б) если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку;
- в) если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, притом только одну.

Не приводя соответствующих доказательств, укажем на следствия приведенных аксиом (интуитивно очевидные).

Следствие. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.

Одно из важнейших понятий в стереометрии — *параллельность*. Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (т.е. не имеют общих точек). Прямая называется *параллельной* плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек; две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Из простейших пространственных представлений ясно (и это легко доказать строго), что справедливы следующие утверждения:

а) через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну; аналогично через точку, лежащую вне плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну;

б) плоскость и не лежащая в ней прямая параллельны, если в этой плоскости найдется прямая, параллельная данной прямой;

в) если плоскость параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны;

г) если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые, возникающие в пересечении, параллельны.

Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны.

Другое важнейшее понятие в стереометрии — *перпендикулярность*. Прямая называется *перпендикулярной* плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку пересечения исходной прямой и плоскости.

Легко видеть, что для проверки факта перпендикулярности прямой и плоскости достаточно убедиться, что она перпендикулярна хотя бы двум непараллельным прямым, лежащим в плоскости (рис. 76).

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Пусть точка B расположена вне плоскости α (рис. 77). Если прямая AB перпендикулярна плоскости α , то отрезок $|AB|$ называется *перпендикуляром*, опущенным из точки B на плоскость α . Если точка C не совпадает с точкой A , то прямая BC

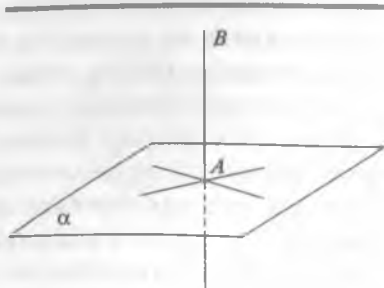


Рис. 76

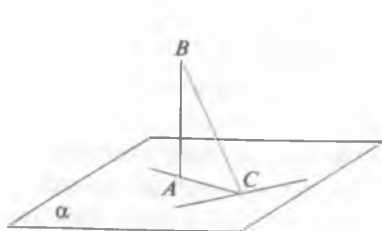


Рис. 77

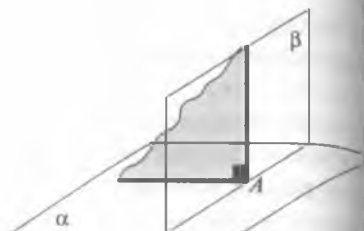


Рис. 78

называется *наклонной* к плоскости α , проведенной из точки B . Отрезок $|AC|$ называется *проекцией* наклонной.

Справедлива следующая теорема о трех перпендикулярах.

Т е о р е м а. Если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и наклонной; если прямая перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и ее проекции (см. рис. 77).

Рассмотрим теперь две плоскости α и β , пересекающиеся по некоторой прямой. Проведем через произвольную точку этой прямой плоскость, которая ей перпендикулярна. Она пересекает исходные плоскости по двум (пересекающимся) прямым. Если последние перпендикулярны, то плоскости α и β называются *перпендикулярными* (рис. 78).

Легко показать, что плоскость α , проходящая через прямую, перпендикулярную плоскости β , будет перпендикулярна плоскости β .

Понятия параллельности и перпендикулярности используются при изображении пространственных фигур на плоских чертежах. Для этого выбирают три определенные плоскости, например координатные, и проектируют фигуру на эти плоскости, опуская перпендикуляры из точек фигуры на плоскости.

При таком проектировании прямолинейные отрезки изображаются прямолинейными отрезками (для их построения достаточно найти проекции всего двух концевых точек). Параллельные отрезки изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками. Длина отрезка в общем случае не сохраняется, однако сохраняется отношение длин отрезков, расположенных на одной прямой (или на параллельных прямых). Рисунок 79 иллюстрирует вид трех проекций кругового цилиндра, рассеченного наклонной плоскостью.

На технических чертежах проекции на каждую плоскость изображаются отдельно с указанием всех основных размеров фигуры. Основные правила построения таких чертежей определяются специальными разделами начертательной геометрии.

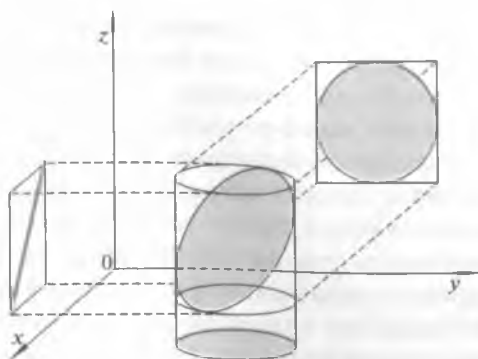


Рис. 79

Естественно, что отношения параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве являются весьма частными случаями их возможного взаиморасположения. Например, две прямые в пространстве являются, вообще говоря, *скрещивающимися*, т.е. для них не существует плоскости, в которой они были бы одновременно расположены. Аналогично прямая по отношению к данной плоскости лишь в частном случае оказывается ей параллельной или перпендикулярной, а в общем случае пересекает ее под углом, отличным от $\frac{\pi}{2}$ (имеется в виду ее угол с проекцией прямой на плоскость). Если же взять две пересекающиеся плоскости, то они образуют так называемый *двугранный угол*. Перпендикуляры в точке A к линии их пересечения, расположенные в данных плоскостях, образуют соответствующий *линейный угол* φ , вообще говоря, отличный от $\frac{\pi}{2}$ (рис. 80). Заметим, что обычно берется наименьший из двух таких углов.

Все описанные в данном подразделе факты легко доказываются элементарными средствами (мы таких доказательств не приводим).

Однако более полное изучение свойств точек, прямых и плоскостей в пространстве требует использования более сложного математического аппарата, которым мы уже располагаем (см. гл. 5). Речь идет о системах координат и векторах.

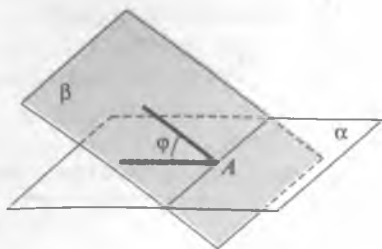


Рис. 80

Прежде чем перейти к его использованию, заметим, что введение систем координат на плоскости и в пространстве формально не предполагается аксиоматикой геометрии. Поэтому, приняв их в рассмотрение, мы получаем какой-то частный вариант истолкования (интерпретации) евклидовой геометрии. Перечисленные выше утверждения в этом варианте становятся либо совершенно очевидными, либо доказываются простейшими рассуждениями. Кроме того, появляется возможность решения многих новых задач. Специалистов заинтересованных в основном в приложениях математики, в такой ситуации уже перестают интересовать какие-то более общие и технически более сложные аксиоматические построения геометрии. Так же поступим и мы, подчеркнув, однако, что и указанные построения имеют глубокий смысл в развитии математических теорий.

6.2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Геометрическая фигура — это некоторое множество точек, обладающее теми или иными характерными свойствами. Будем считать, что на плоскости или в пространстве определена декартова система координат. Поэтому соответствующие свойства можно сформулировать в терминах взаимосвязей координат или с использованием понятия вектора.

Прямая определяется двумя условиями: некоторой фиксированной точкой и направлением, смещаясь в котором мы будем двигаться по точкам прямой. Направление, соответственно, можно указать, зафиксировав какой-то вектор: $\vec{a}(m, n)$ — для плоскости или $\vec{a}(m, n, l)$ —

для трехмерного пространства. Поэтому дадим следующее определение.

Определение. *Прямой*, проходящей через точку M_0 в направлении вектора $\vec{a}$, называется множество точек M , обладающее тем свойством, что вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

В случае плоскости прямая задается уравнением $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$. Здесь

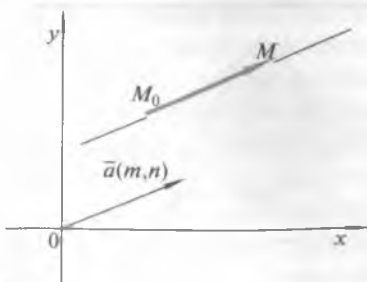


Рис. 81

$M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка, а $M(x, y)$ — произвольная точка на прямой (рис. 81).

В случае пространства: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{l}$. Фактически в этой записи два уравнения (вспомним о нашем соглашении (см. подразд. 5.2): если, например, $n = 0$, то $y = y_0$).

Такое уравнение прямой называется *каноническим*. Учитывая его вид, замечаем, что уравнение $x = x_0$ задает вертикальную прямую на плоскости, а $y = y_0$ — горизонтальную; уравнение $y = kx + b$ — наклонная прямая с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 82).

Все эти случаи прямой на плоскости можно объединить уравнением $Ax + By + D = 0$, которое называется *общим уравнением прямой* ($A, B \neq (0, 0)$).

Заслуживают внимания частные случаи прямой: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ — уравнение *прямой, проходящей через две точки плоскости* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Аналогично в пространстве прямая

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

проходит через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Если в каноническом уравнении прямой обозначить указанные дроби параметром t , который может принимать любые действительные значения, то возникает *параметрическое уравнение прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + lt, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Пусть заданы две прямые с направляющими векторами $\vec{a}_1(m_1, n_1, l_1)$ и $\vec{a}_2(m_2, n_2, l_2)$. Прямые параллельны, если $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}$, и перпендикулярны, если $m_1m_2 + n_1n_2 + l_1l_2 = 0$. В частности, в случае двух

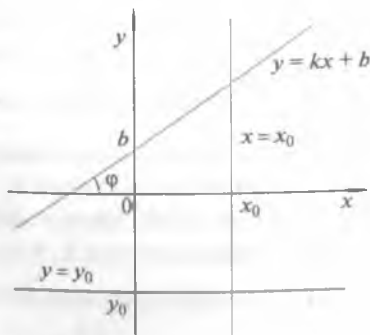


Рис. 82

прямых на плоскости, заданных общими уравнениями $A_1x + B_1y + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + D_2 = 0$, признак параллельности выражается равенством $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, а признак перпендикулярности равенством $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Это непосредственно вытекает из признаков параллельности и перпендикулярности векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Следствие. Если прямые заданы на плоскости уравнениями с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 , то признак их параллельности $k_1 = k_2$, а признак перпендикулярности $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

*↓ Выше мы сформулировали теорему о трех перпендикулярах, но не привели ее доказательства. Рассмотрим для примера, как оно может выглядеть, если воспользоваться средствами аналитической геометрии.

Заметим, что для доказательства ортогональности соответствующих прямых, о которых говорится в теореме, достаточно убедиться, что ортогональны векторы, определяющие их направление. Выберем систему координат так, чтобы наклонная была расположена в плоскости xOy , тогда ее направление определяется вектором $\vec{a}_1(0, y_1, z_1)$, где $y_1 \neq 0$ и $z_1 \neq 0$. Ее проекция на плоскость xOy имеет направление $\vec{a}_2(0, y_2, 0)$, где $y_2 \neq 0$. А ортогональную прямую будем брать в плоскости xOz , тогда ее направление будет задаваться вектором $\vec{a}_3(x_3, y_3, 0)$, где $x_3 \neq 0$. Напомним, что для проверки ортогональности векторов достаточно убедиться, что их скалярное произведение равно нулю (рис. 83).

Пусть $\vec{a}_3 \perp \vec{a}_2$, т.е. выбранная прямая ортогональна проекции наклонной. Тогда $(\vec{a}_3 \vec{a}_2) = 0 \cdot x_3 + y_2 y_3 + 0 \cdot 0 = 0$, т.е. $y_3 = 0$, и, значит, вектор $\vec{a}_3$ может быть записан в виде $\vec{a}_3(x_3, 0, 0)$. Но тогда ясно, что $(\vec{a}_3 \vec{a}_1) = 0$, т.е. $\vec{a}_3 \perp \vec{a}_1$ — прямая ортогональна и самой наклонной.

Предположим, что выбранная прямая ортогональна наклонной: $\vec{a}_3 \perp \vec{a}_1$. Тогда $(\vec{a}_3 \vec{a}_1) = 0 \cdot x_3 + y_1 y_3 + 0 \cdot z_1 = 0$, т.е. снова $\vec{a}_3(x_3, 0, 0)$, и поэтому $(\vec{a}_3 \vec{a}_2) = 0$, т.е. $\vec{a}_3 \perp \vec{a}_2$. *↑

Обратимся теперь к рассмотрению геометрических фигур, называемых *плоскостями*.

Плоскость, как и прямая, определяется двумя условиями:

а) некоторой фиксированной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ей принадлежащей;

б) вектором $\vec{n}(A, B, C)$, называемым *нормальным* и обладающим тем свойством, что ему ортогонален вектор M_0M , где $M(x, y, z)$ — произвольная точка фигуры (т.е. плоскости — рис. 84).

Поскольку $M_0M(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и скалярное произведение $(\vec{n} M_0M) = 0$, получаем *уравнение плоскости, проходящей через точку M_0* в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

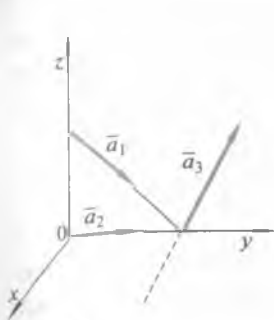


Рис. 83

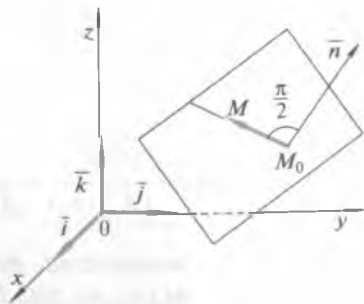


Рис. 84

А общее уравнение плоскости предстает как произвольное линейное уравнение: $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A, B, C \neq (0, 0, 0)$).

Если какой-то коэффициент при переменной равен нулю, то плоскость параллельна соответствующей координатной оси или содержит ее (при $D = 0$). Действительно, если, например, $A = 0$, то $\vec{n}(0, B, C)$ ортогонален $\vec{i}(1, 0, 0)$, так как $(\vec{n}|\vec{i}) = 0$. Тогда прямая, заданная точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{i}$, лежит в данной плоскости и параллельна оси Ox .

Аналогично легко усмотреть, что обращение в нуль двух таких коэффициентов означает, что плоскость параллельна какой-то координатной плоскости или даже совпадает с ней (при $D = 0$). Например, плоскость $z = 2$ параллельна плоскости xOy .

Две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны, если параллельны их нормальные векторы, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Плоскости перпендикулярны, если ортогональны их нормальные векторы: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Ясно, что пара пересекающихся плоскостей определяет некоторую прямую. От такого способа ее задания легко перейти к другим, описанным ранее. Взяв, например, в качестве направляющего вектор $\vec{p} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ (векторное произведение нормальных векторов) и произвольную фиксированную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где x_0, y_0, z_0 — любая тройка чисел, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

мы перейдем к каноническому уравнению данной прямой.

Двугранный угол, образованный двумя плоскостями, может быть измерен наименьшим углом φ , заданным их нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Косинус такого угла легко найти с помощью скалярного произведения:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, удобно записать в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Оно возникает, если воспользоваться признаком компланарности векторов $\vec{MM}_1$, $\vec{M}_2\vec{M}_1$, $\vec{M}_3\vec{M}_1$, приведенным в подразд. 5.2.

Используя понятие вектора, уравнения, представляющие прямые и плоскости, и алгебраические средства их исследования, можно решать разнообразные задачи, связанные со взаиморасположением прямых и плоскостей в пространстве.

Например, если заданы три плоскости, то возникает система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Возможно, что она имеет единственное решение. Тогда три плоскости имеют лишь одну общую точку. Но эти плоскости могут оказаться и параллельными (если система не имеет решений), могут пересекаться по прямой, совпадать и т. п.

Все эти случаи легко выявить, исследуя такую систему уравнений, например, методом Гаусса.

Поскольку и прямая может быть задана уравнениями (например, в пространстве — парой уравнений, связанных с ее каноническим представлением), то всевозможные отношения нескольких прямых и плоскостей выявляются на основе анализа соответствующих систем линейных уравнений. Разнообразные углы, связанные с расположением прямых и плоскостей, удобно исследовать, оперируя понятиями направляющего и нормального векторов. Например, если две прямые в пространстве скрещиваются (т. е. для них не существует общей плоскости, в которой они расположены), то можно рассматривать угол между их направляющими векторами, а угол между прямой и некоторой плоскостью определять как $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, где ψ —

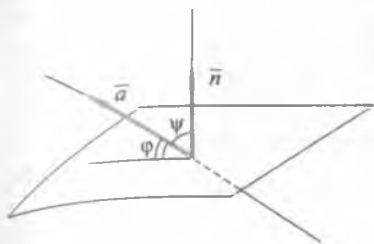


Рис. 85

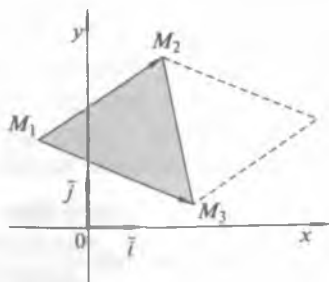


Рис. 86

наименьший угол между направляющим вектором прямой и нормальным для плоскости (рис. 85).

*↓ Укажем в качестве еще одного примера на возможность вычислить площадь треугольника на плоскости xOy с вершинами $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$.

Как известно (см. подразд. 5.2), векторное произведение $[\overline{M_1 M_2} \overline{M_1 M_3}]$ является вектором, длина которого равна площади соответствующего параллелограмма (рис. 86). Поэтому площадь S данного треугольника будет равна ее половине.

Значит, $S = \frac{1}{2} |[\overline{M_1 M_2} \overline{M_1 M_3}]|$. Поскольку $\overline{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и $\overline{M_1 M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$, получаем

$$\begin{aligned} [\overline{M_1 M_2} \overline{M_1 M_3}] &= [(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}][(x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j}] = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)[\vec{i} \vec{i}] + (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)[\vec{j} \vec{i}] + (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)[\vec{i} \vec{j}] + \\ &+ (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)[\vec{j} \vec{j}] = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)(-\vec{k}) + (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)\vec{k}, \end{aligned}$$

т.е.

$$|[\overline{M_1 M_2} \overline{M_1 M_3}]| = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

Мы учли, что $[\vec{i} \vec{i}] = [\vec{j} \vec{j}] = 0$, $[\vec{i} \vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j} \vec{i}] = -\vec{k}$ и $|\vec{k}| = 1$.

Соответствующую формулу легко получить и для пространства. *↑

6.3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мы видели, что в рамках аналитической геометрии линейные уравнения, т.е. уравнения вида

$$Ax + By + c = 0;$$

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

представляют важный частный случай геометрических фигур на плоскости и в пространстве: прямые и плоскости. Естественно поставить вопрос о геометрических фигурах, представляемых квадратными уравнениями, которые для плоскости имеют вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

а для пространства —

$$A_1x^2 + A_2xy + A_3xz + B_1y^2 + B_2yz + C_1z^2 + D_1x + D_2y + D_3z + E = 0.$$

Первые называют *кривыми*, а вторые — *поверхностями второго порядка*.

Глядя на приведенные уравнения, легко предвидеть, что в зависимости от коэффициентов при неизвестных соответствующие фигуры будут существенно различаться по своим свойствам и представлены в довольно богатом разнообразии, а их математическое исследование окажется значительно более сложным, чем для линейных уравнений. Это и в самом деле так. Сколько-нибудь подробное рассмотрение таких исследований далеко выходит за рамки данного курса математики. Поэтому ограничимся только указанием на некоторые общие идеи построения соответствующих теорий и простейшие примеры таких геометрических фигур.

Во-первых, заметим, что можно попытаться упростить вид исследуемых уравнений за счет подходящего выбора системы координат, т. е., по сути, за счет такого преобразования исходной системы координат, которое не меняет формы фигуры, например, параллельного переноса и поворота. На рис. 87 видно, что фигура, называемая *эллипсом*, образно говоря, неудачно расположена по отношению к исходной системе координат (xOy), и поэтому вид соответствующего ей уравнения будет более сложным, чем для более удачной системы координат ($x'O'y'$).

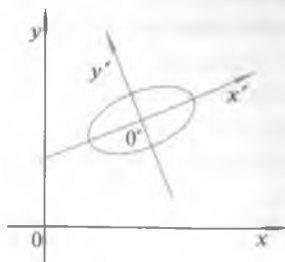


Рис. 87

Пользуясь такого рода преобразованиями, получают наиболее простые уравнения кривых и поверхностей, которые называют *каноническими*.

Во-вторых, математическое исследование свойств указанных фигур будет связано уже не с системами линейных уравнений, для которых, как мы видели, существуют детально разработанная алгебраическая теория и простые вычислительные алгоритмы.

мы, а, вообще говоря, с системами квадратичных уравнений и неравенств. Для последних алгебраические методы анализа приходится существенно усиливать, например, за счет привлечения средств математического анализа, связанных с использованием теории пределов и так называемого дифференциального и интегрального исчисления (см. гл 7 и 8).

Простейшей кривой второго порядка является *окружность*, которую можно определить как множество точек, находящихся на фиксированном расстоянии R от данной точки.

Если дана точка $O(0, 0)$, то, учитывая формулу расстояния между двумя точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

$$r(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

полагая $A_1 = A(x, y)$ и $A_2 = O(0, 0)$, получаем *каноническое уравнение окружности*: $x^2 + y^2 = R^2$. Здесь O называют *центром* окружности, а R — *радиусом* (рис. 88).

Уравнение $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ задает верхнюю полуокружность, а $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ — нижнюю.

Неравенство $x^2 + y^2 \leq R^2$ определяет множество точек на плоскости, расстояние от которых до точки O не превосходит R , т.е. круг. Аналогично $x^2 + y^2 > R^2$ — внешность круга.

Легко видеть, что если центр окружности находится в точке $C(a, b)$ (рис. 89), то ее уравнение будет иметь вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Это уравнение уже не является каноническим.

Части круга придется задавать уже системами. Например, изображенный на рис. 90 сектор можно задать системой

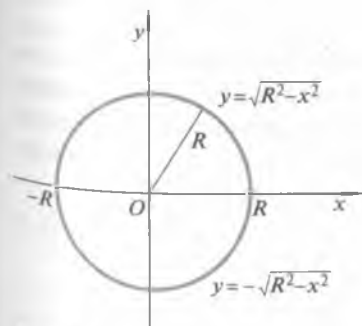


Рис. 88

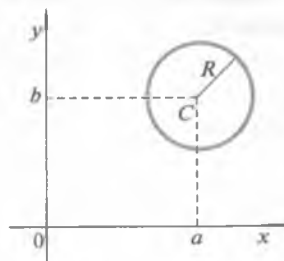


Рис. 89

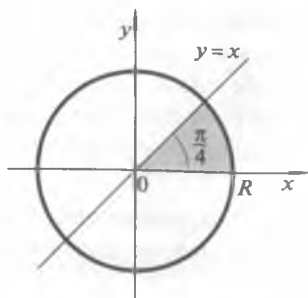


Рис. 90

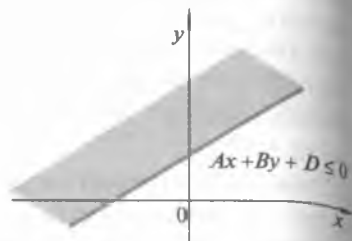


Рис. 91

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0; \\ y \leq x. \end{cases}$$

Действительно, линейное неравенство $Ax + By + D \leq 0$ задает полуплоскость (рис. 91). Легко узнать, какую именно из тех двух, что определяются соответствующим уравнением: достаточно проверить справедливость неравенства хотя бы для одной точки полуплоскости.

Поэтому первое неравенство определяет все точки круга, второе и третье — первую четверть (квадрант), четвертое — полуплоскость, расположенную ниже прямой $y = x$ (для точки $(R, 0)$ неравенство $y \leq x$ верно).

Аналогично система $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2; \\ \frac{x}{R} + \frac{y}{R} \geq 1 \end{cases}$ определяет сегмент, изобра-

женный на рис. 92.

Для фигур, связанных с окружностями, часто оказывается полезным использование полярной системы координат. Например, каноническое уравнение окружности радиуса R в полярной системе координат (r, φ) выглядит особенно просто: $r = R (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, а изображенный на рис. 90 сектор задается простой системой

$$\begin{cases} r \leq R; \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Укажем также на параметрические уравнения окружности:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi; \\ y = R \sin \varphi; \end{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

В роли параметра здесь выступает полярный угол φ .

Из канонического уравнения окружности, которое можно записать также

и в виде $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$, видно, что

переменные x и y оказываются в записи совершенно равноправными. Геометрически это означает, что поворот плоскости относительно биссектрис координатных углов на угол π не изменяет расположения линии. Более общий случай кривой второго порядка связан с уравнением, для которого уже нет такого равноправия:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 (a \neq b).$$

Соответствующая кривая называется *эллипсом* (рис. 93). Образно говоря, эллипс — это окружность, сжатая (или растянутая) вдоль некоторой оси. Числа a и b называются полуосями эллипса. Существует и другое определение эллипса: оказывается, что его характеристическим свойством является то, что сумма расстояний $(r_1 + r_2)$ любой его точки M до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (называемых фокусами) является величиной постоянной.

На рис. 79 видно, что при сечении цилиндрической поверхности наклонной плоскостью возникает эллипс.

Другой вид кривых второго порядка — *гиперболы*. Простейший пример их задания — с помощью уравнения вида $xy - k = 0$ (рис. 94). Однако это лишь частный случай гипербол. Их каноническое урав-

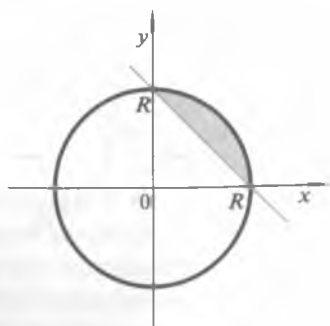


Рис. 92

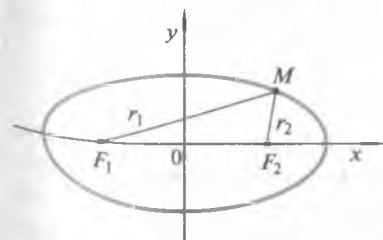


Рис. 93

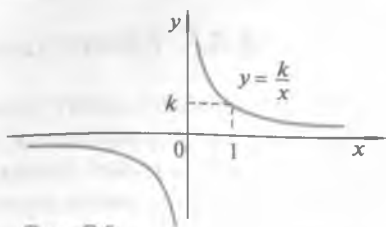


Рис. 94

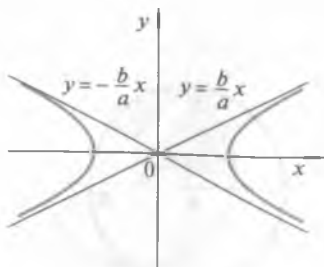


Рис. 95

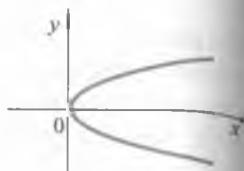


Рис. 96

нение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Заметим, что гиперболы имеют асимптоты (рис. 95) $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ ($a > 0, b > 0$), в чем легко убедиться, применив формулы для нахождения наклонных асимптот к функциям $y = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$ (см. подразд. 3.3).

Еще один класс кривых второго порядка — *параболы*. Примером параболы может служить линия, заданная уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Однако каноническим считается уравнение вида $y^2 = 2px$ (рис. 96).

Перечисленные классы кривых являются основными, но они не исчерпывают всего разнообразия кривых второго порядка, которые в частных случаях могут, например, вырождаться в точку, пару пересекающихся прямых или даже задавать пустые множества точек на плоскости, как, например, уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс).

6.4.

СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

6.4.1. Многогранники

Каждая плоскость делит трехмерное пространство на две области, задаваемые соответствующими линейными неравенствами. Совокупность плоскостей может задавать ограниченную пространственную фигуру, которую называют *многогранником*. Границу многогранника образуют плоские многоугольники, которые называют *гранями*; от

резки, являющиеся границами этих многоугольников, называются *ребрами*, а вершины многоугольников — *вершинами* многогранника.

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Если в пространстве задана система координат, то любой многогранник можно задать системой линейных неравенств. Однако такой способ его исследования на практике редко оказывается удобным ввиду того, что решение подобных систем технически громоздко. Это не является препятствием при использовании компьютерных программ. Поэтому подобный аналитический подход к исследованию геометрических фигур с успехом используется в ряде разделов прикладной математики. Но мы ограничимся лишь описанием основных геометрических понятий, связанных с простейшими многогранниками.

Первым нашим примером многогранника будет призма.

Призмой называется выпуклый многогранник, у которого имеются две параллельные грани, называемые *основаниями*, а все остальные грани (называемые *боковыми*) являются параллелограммами, каждый из которых имеет одно общее ребро с каждым основанием (на рис. 97 изображена треугольная призма).

Частным случаем призмы является *параллелепипед*: его основания — параллелограммы. Если все боковые грани призмы являются прямоугольниками, то она называется *прямой*. Частным случаем ее является прямоугольный параллелепипед, все грани которого — прямоугольники (рис. 98). Длины a , b , c непараллельных ребер называются *размерами* прямоугольного параллелепипеда. Легко доказать, что все диагонали прямоугольного параллелепипеда пересекаются в одной точке.

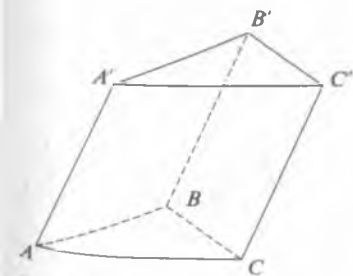


Рис. 97



Рис. 98

Поскольку понятие площади многоугольника известно (она равна сумме площадей треугольников, на которые может быть разбит многоугольник), имеет смысл понятие площади поверхности призмы, которая складывается из площадей оснований и площади боковой поверхности.

Площадь боковой поверхности прямой призмы можно вычислить по следующей формуле:

$$S_{\text{бок}} = hp,$$

где h — высота призмы (т.е. длина бокового ребра) и p — периметр основания (т.е. сумма длин ребер основания призмы).

Другой простой пример многогранника — *пирамида*. Это выпуклый многогранник, образованный многоугольником (лежащим в основании) и треугольными гранями, которые определяются фиксированной точкой, лежащей вне указанного многоугольника, и его сторонами (рис. 99).

Точка O называется *вершиной* пирамиды. *Высотой* пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость, в которой лежит основание пирамиды.

Если в основании лежит n -угольник, то и пирамида называется *n -угольной* (на рис. 99 изображена четырехугольная пирамида). Если в основании лежит треугольник, то пирамида называется *тетраэдром*.

Важный частный случай — правильная пирамида. У такой пирамиды в основании лежит правильный многоугольник (например, равносторонний треугольник, квадрат и т.д.), а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

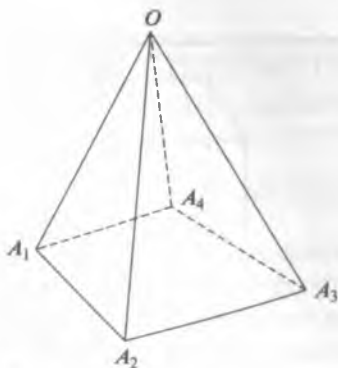


Рис. 99

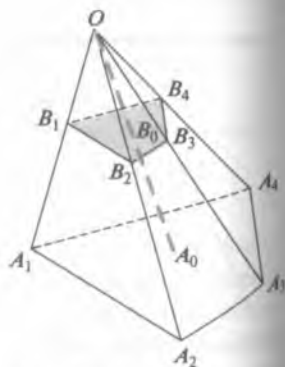


Рис. 100

У правильной пирамиды все боковые грани — равные равнобедренные треугольники, высоты которых называются апофемами, а площадь боковой поверхности, очевидно, равна половине произведения периметра основания на апофему.

Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то в сечении возникает многоугольник, подобный основанию (рис. 100). Действительно, каждая боковая грань предстает в виде наложения подобных треугольников (например, $\triangle A_1OA_2 \sim \triangle B_1OB_2$), и отношения соответствующих сторон оказываются равными для всех боковых граней ввиду того, что ребра оказываются общими для соседних граней. В результате такого сечения исходная пирамида разбивается на два многогранника, один из которых — пирамида (назовем ее отсеченной) с той же вершиной, а другой — так называемая *усеченная пирамида*.

Предположим для простоты, что основание высоты пирамиды A_0 оказалось внутри многоугольника — основания пирамиды. Тогда отношение высот $k = \frac{|OB_0|}{|OA_0|}$ является коэффициентом подобия (го-

мотетии с центром в O), пользуясь которым можно сравнить площади многоугольников, лежащих в основании исходной пирамиды S и отсеченной от нее S_1 . Легко видеть, что $\frac{S_1}{S} = k^2$. Действительно, для

любого разбиения основания исходной пирамиды на треугольники возникает гомотетичное разбиение оснований отсеченной пирамиды, причем все размеры гомотетичных треугольников изменяются в k раз. Но тогда их площади изменяются в k^2 раз (поскольку площадь треугольника равна половине произведения основания треугольника на его высоту). В итоге суммарная площадь для оснований пирамид изменяется в k^2 раз.

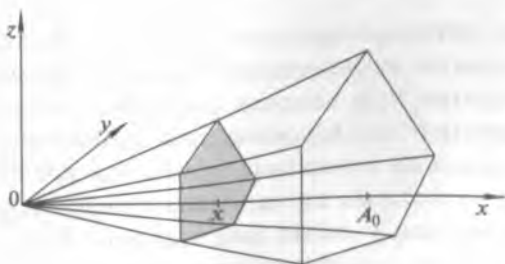


Рис. 101

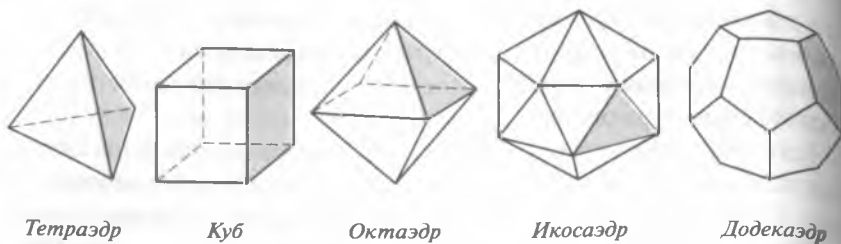


Рис. 102

Если такую пирамиду рассмотреть по отношению к системе координат, для которой одна из координатных осей (Ox) направлена вдоль высоты пирамиды (рис. 101), а основание пирамиды параллельно координатной плоскости (Oyz), то площадь сечения пирамиды в любой точке x для $0 \leq x \leq h$ будет равна $S(x) = \frac{x^2}{h^2} S$, где S — площадь основания пирамиды и $h = |OA_0|$ — ее высота.

Специального внимания заслуживают *правильные многогранники*, все грани которых являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и вершин, в которых сходится одно и то же число ребер. Оказывается, что существует всего пять типов выпуклых правильных многогранников: *тетраэдр* (у него все грани — правильные треугольники и в каждой вершине сходится три ребра), *куб* (у него все грани — квадраты), *октаэдр* (у него все грани — правильные треугольники, но в каждой вершине сходится по четыре ребра), *икосаэдр* (у которого все грани — правильные треугольники, но в каждой вершине сходится по пять ребер) и *додекаэдр* (у него все грани — правильные пятиугольники, а в каждой вершине сходится три ребра) (рис. 102).

6.4.2. Тела вращения

Уравнения, которые определяют поверхности второго порядка, довольно сложны для исследования. Обычно их стремятся упростить, добиваясь представления каждого конкретного вида таких поверхностей наиболее простым каноническим уравнением, подобно тому, как это делалось и по отношению к плоским кривым второго порядка. Число возможных случаев вида поверхности оказывается весьма значительным — около двух десятков. Рассмотрение их не входит в нашу задачу; мы ограничимся заведомо неполным описанием весьма важного частного случая — так называемых *поверхностей*

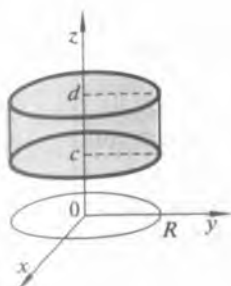


Рис. 103

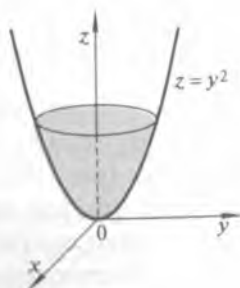


Рис. 104

стей вращения, которые возникают в результате вращения некоторой кривой вокруг одной из координатных осей.

Пусть, например, в плоскости yOz задан прямолинейный отрезок, параллельный оси Oz . Если вращать его вокруг оси Oz , возникает поверхность, называемая *цилиндрической* (рис. 103). Соответствующее пространственное тело называют *цилиндром* (прямым, круговым); основания его — круги

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = c \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = d. \end{cases}$$

а боковая поверхность имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$.

Пусть теперь в плоскости yOz задана *парабола* $z = y^2$. Вращая ее вокруг оси Oz , получаем поверхность, называемую *параболоидом вращения* (рис. 104).

Аналогично в результате вращения гиперболы возникают *гиперболоиды*. Их два вида — *однополостный*, который появляется при

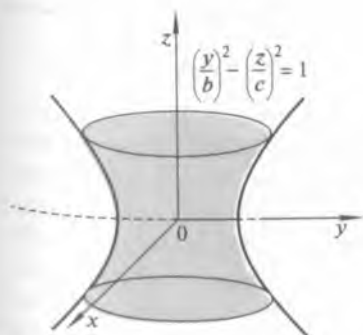


Рис. 105

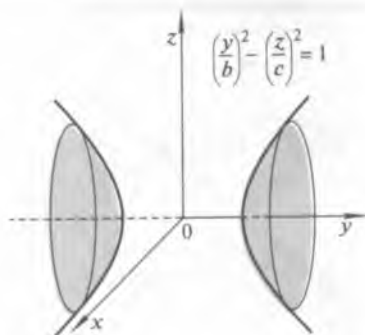


Рис. 106

вращении гиперболы $\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ вокруг оси Oz (рис. 105), и *двухполостный* — если гипербола вращается вокруг оси Oy (рис. 106).

Если вокруг оси Oz вращать прямую $z = ky$, то возникает поверхность *конуса* (рис. 107).

Заметим, что, как ясно из определения, уравнения поверхностей вращения легко получить из исходного уравнения кривой, которая вращается. Достаточно подставить в последнее вместо переменной y^2 комбинацию $(x^2 + y^2)$.

Действительно, если в плоскости $x = 0$ определенное значение z_0 соответствовало некоторому y_0 , то в пространстве для поверхности вращения то же самое значение z_0 будет соответствовать всем точкам, расположенным на окружности,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = y_0^2; \\ z = z_0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем для цилиндрической поверхности уравнение: $x^2 + y^2 = R^2$, поскольку уравнение исходной линии $y = R$ (т.е. $y^2 = R^2$) в плоскости $x = 0$. Аналогично уравнение параболоида: $z = x^2 + y^2$, а для конуса: $z^2 = k(x^2 + y^2)$.

Если вращать эллипс $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$, то образуется *эллипсоид* (вращения), уравнение которого $\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$. В частности, при $b = c = R$ вращаться будет окружность, а возникнет поверхность, называемая *сферой*. Ее уравнение: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рис. 108). Тело, ограниченное сферой, — *шар*: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Если центр сферы

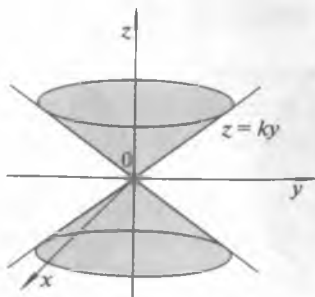


Рис. 107

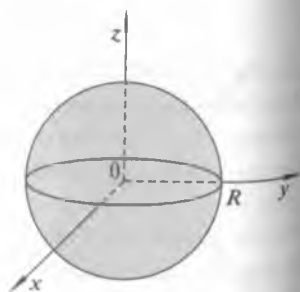


Рис. 108

радиуса R находится в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) , то ее уравнение имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Исследуя уравнения, подобные приведенным выше, можно решать ряд задач, связанных с исследованием свойств поверхностей второго порядка и их пересечений с другими поверхностями. Рассмотрим кратко некоторые из таких свойств.

Свойство 1. Плоскость, пересекающая боковую поверхность цилиндра перпендикулярно его оси, образует в пересечении окружность, а пересекающая наклонно к оси — эллипс.

*↓ Первая часть утверждения очевидна, поскольку указанная плоскость имеет уравнение $z = z_0$, и, следовательно, уравнения линии пересечения $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = z_0 \end{cases}$ определяют окружность.

Вторую проверить несколько сложнее: очевидно, в пересечении возникает замкнутая «овальная» кривая, но следует убедиться, что это именно эллипс. Для упрощения рассуждений пересечем поверхность $x^2 + y^2 = R^2$ плоскостью, проходящей через ось Oy : $z = kx$ (для того чтобы сечение, хотя и сдвинутое, походило на изображенное на рис. 79, возьмем $k < 0$). А теперь выполним поворот системы координат, сохранив направление оси Oy и взяв плоскость $z = kx$ в качестве координатной (рис. 109). Тогда интересующее нас уравнение изучаемой линии пересечения в новой системе координат x', y', z' будет получено, если положить $z' = 0$.

Связь координат при повороте (см. подразд. 5.1.2): $x = x' \cos \varphi - z' \sin \varphi$, где φ — угол поворота (формула для z нам здесь не нужна). Подставляя значение x в уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ и полагая $z' = 0$, находим: $(x' \cos \varphi)^2 + y^2 = R^2$. Значит, линия пересечения в новой системе координат задается системой

$$\begin{cases} \left(\frac{x'}{R \cos \varphi} \right)^2 + \left(\frac{y}{R} \right)^2 = 1; \\ z' = 0. \end{cases}$$

Ясно, что это эллипс.*↑

Свойство 2. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а его боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса. Изменяя положение секущей плоскости, можно получить в ее пересечении с боковой поверхностью конуса эллипс, параболу, гиперболу или две пересекающиеся прямые.

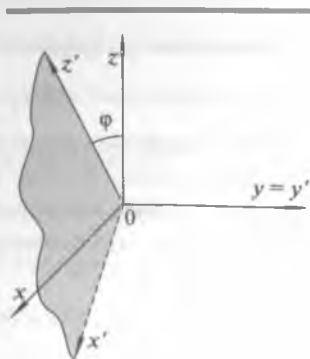


Рис. 109

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы, заметив лишь, что в нем можно использовать идеи, аналогичные приведенным выше для свойства 1. Учитывая факт, сформулированный в свойстве 2, эллипс, гиперболу и параболу иногда называют *коническими сечениями*.

Свойство 3. Всякое сечение шара плоскостью есть круг.

Действительно, учитывая симметрию шара, можно считать, что шар имеет центром начало координат, а секущая плоскость параллельна плоскости xOy , т. е. имеет уравнение $z = z_0$, где z_0 — фиксированное число ($-R < z_0 < R$). Тогда линия пересечения задается системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z_0^2 = R^2; \\ z = z_0 \end{cases}$$

или, после обозначения $R_1^2 = R^2 - z_0^2$, системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R_1^2; \\ z = z_0. \end{cases}$$

Эта линия, очевидно, является окружностью радиуса R_1 , и, значит, сечение — круг.

Заметим, что при $z_0 = \pm R$ сечение превращается в точку, которую можно считать кругом нулевого радиуса. Соответствующую плоскость называют *касательной* к сфере.

Свойство 4. Пересечение двух сфер есть окружность.

Действительно, возьмем две пересекающиеся сферы радиусами R_1 и R_2 с центрами, расположенными на оси Oz . Их уравнения:

$$x^2 + y^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2;$$

$$x^2 + y^2 + (z - z_2)^2 = R_2^2.$$

Вычитаем из первого уравнения второе, находим

$$2(z_2 - z_1)z = R_1^2 - R_2^2 - z_1^2 + z_2^2.$$

Это линейное уравнение по переменным x, y, z (фактически присутствует лишь z), т. е. оно определяет плоскость (параллельную плоскости xOy), в которой лежит линия пересечения сферы. А ранее мы доказали, что сечение шара плоскостью является кругом.

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ, ЕЕ СМЫСЛ

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки x_0 . Поставим задачу исследовать ее поведение вблизи этой точки. Для этого рассмотрим, как меняются ее значения при небольших изменениях аргумента, т.е. при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$ — малое приращение независимой переменной (не выводящее x за пределы исходной окрестности).

Значение функции получает приращение $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Его можно истолковать как *среднюю скорость* изменения значений функции на участке от x_0 до $x_0 + \Delta x$.

Если, в частности, рассматривать закон механического движения $S = S(t)$ по прямой, где t — время, а S — пройденный точкой путь, то дробь $\frac{\Delta S}{\Delta t} = v_{\text{ср}}$ — это средняя скорость движения точки на отрезке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ именно в том смысле, как она определяется в физике.

Можно поставить вопрос о существовании предела $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. В случае непрерывной функции $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, поэтому речь идет о раскрытии неопределенности типа $\left(\frac{0}{0}\right)$. Ясно, что этот предел может существовать или не существовать. Случай, когда он существует, заслуживает особого внимания, поскольку позволяет судить по значению этого предела о *поведении*

функции в данной точке x_0 . В частности, ввести понятие о скорости изменения функции в данной точке, а не только ее «среднего значения».

Такой предел (если он существует) называли *производной функции в данной точке* и обозначили y' . Используют и другие обозначения: $y'_x, f'(x_0), \frac{dy}{dx}$ (читается: «дэ игрек по дэ икс»). Заметим, что обозначение $\frac{dy}{dx}$ мы рассматриваем пока как единый символ, который нельзя истолковать, скажем, как некоторую дробь.

Итак, смысл производной — скорость изменения функции в данной точке. В частности, скорость механического движения точки по прямой — это производная от пути по времени $v = \frac{ds}{dt}$ (*физический смысл производной*).

Конструкция $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ встречается во многих задачах.

Возьмем, например, важное физическое понятие — силу тока I . Приблизненно ее можно описать как количество электричества, протекающее через сечение проводника в единицу времени, т. е. если за время Δt протекло электричество ΔQ , то среднюю силу тока характеризует отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Поэтому ясно, что точное определение силы тока дается формулой $I = \frac{dQ}{dt}$.

Или рассмотрим другое понятие — плотность вещества. Пусть масса m распределена вдоль стержня и на его участок Δx приходится масса Δm . Тогда плотность стержня в данной точке — это $\rho = \frac{dm}{dx}$. В общем случае, когда стержень неоднородный, $\rho = \rho(x)$; для однородного стержня плотность постоянна.

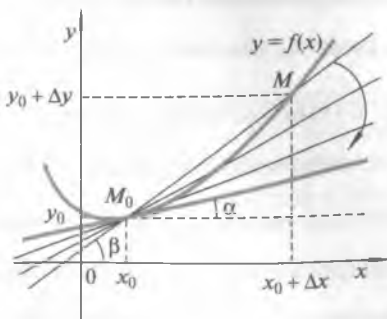


Рис. 110

Рассмотрим теперь понятие *касательной* к линии $y = f(x)$ в данной точке x_0 . Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ на кривой $y = f(x)$, точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ будем перемещать по кривой, приближая ее к M_0 (рис. 110). Прямая, проходящая через точки M_0 и M , называется *секущей*. Ее уравнение: $y - y_0 = (\operatorname{tg} \beta)(x - x_0)$, где $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если существует предельное положение секущей при $\Delta x \rightarrow 0$, то его называют *касательной* к данной кривой в точке M_0 . Уравнение касательной будет иметь вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$.

Итак, если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то ее график имеет в этой точке касательную, уравнение которой

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

и, следовательно, геометрическим смыслом производной может служить тангенс угла наклона к оси Ox касательной к графику функции.

7.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Ясно, что полезно научиться вычислять производные прежде всего от элементарных функций (процедуру нахождения производных называют *дифференцированием*).

Пусть, например, функция является тождественно постоянной: $y = c$. Тогда она не меняет своих значений при изменении x , т. е. $\Delta y = 0$. Поэтому производная равна нулю: $c' = 0$.

Пусть $y = x$. Тогда $\Delta y = \Delta x$, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, поэтому $x' = 1$.

Пусть $y = x^2$. Тогда в произвольной фиксированной точке x приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$. Поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Оказывается, что для любого α ($\alpha \neq 0$) верна формула

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

(мы приводим ее без доказательства). Например, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$. По определению производной

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \\ &= \cos x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались возможностью вычислить предел произведения двух функций как произведение их пределов, а также непрерывностью функции $y = \cos x$.

Таким образом, для вычисления производной от $\sin x$ достаточно вычислить предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, где $\alpha = \frac{\Delta x}{2}$.

Как будет показано далее, этот предел существует и равен 1. Значит, доказана формула

$$(\sin x)' = \cos x.$$

*↓ Убедимся в справедливости равенства $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ввиду четности функции $\frac{\sin x}{x}$ достаточно рассмотреть только случай $x > 0$. Замечаем, что при малых x верно неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ — это ясно, например, из геометрических соображений (рис. 111): в круге радиуса 1 верно $|AB| = \sin x$, $|BC| = x$, $|DC| = \operatorname{tg} x$ и, очевидно, $|AB| < |BC| < |DC|$ (знаком $|BC|$ обозначена длина дуги BC). Поделив $\sin x$ на члены полученного неравенства, получаем

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

и, вычитая из 1 члены последнего неравенства, находим

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Однако $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}$. Значит, при малых $|x|$

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{x^2}{2}.$$

Понятно, что, обеспечив неравенство $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$ за счет условия $x \rightarrow 0$, мы

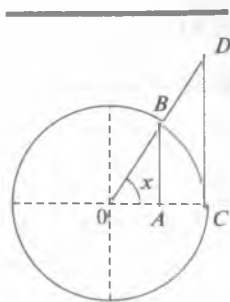


Рис. 111

гарантируем и $\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon$, что доказывает интересующее нас равенство. *↑

Совершенно аналогично легко доказать, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Вообще, для всех простейших элементарных функций можно вычислить их производные на основе определения, а также с использованием некоторых правил дифференцирования, о которых речь пойдет далее.

Таблица 2. Производные простейших элементарных функций

1. $c' = 0$	2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$	4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$	6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Не проводя соответствующих вычислений, сведем соответствующие формулы в таблицу, которую **необходимо знать наизусть** (табл. 2).

Для того чтобы на основе такой таблицы вычислять производные от любых элементарных функций, нужно знать правила вычисления производных от суммы, разности, произведения и частного двух функций, а также — для сложной функции. Вот эти *правила*:

1) $[ku(x)]' = ku'(x)$, где k — постоянный множитель, а функция $u = u(x)$ имеет производную (т.е. постоянный множитель можно выносить за знак производной);

2) $(u+v)' = u' + v'$, где функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные (т.е., кратко говоря, производная суммы равна сумме производных);

3) $(uv)' = u'v + uv'$;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Все эти формулы доказываются по одной и той же схеме, которую мы продемонстрируем, например, для правила 3. Дадим переменной x приращение Δx . Тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ получают приращение

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x), \quad \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x),$$

а их произведение — приращение

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = (\Delta u)v + (\Delta v)u + (\Delta u)\Delta v.$$

Поделив это равенство на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = u'v + uv'$$

(мы учли, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ в силу непрерывности каждой функции, которая имеет производную).

5) Пусть теперь дана сложная функция $u = u(y)$, где $y = y(x)$, т.е. $u = u[y(x)]$. Предположим, что существуют производные $\frac{du}{dy}$ и $\frac{dy}{dx}$. Тогда производная сложной функции может быть найдена по формуле

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

*↓ Действительно, задав приращение Δx , получаем приращение Δy , которое, в свою очередь, если $\Delta y \neq 0$, порождает приращение Δu . Ради упрощения рассуждений мы исключаем из рассмотрения возможность случая $\Delta y = 0$. Тогда имеем $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Теперь перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y}.$$

Заметим, что функция, имеющая в некоторой точке производную, обязательно непрерывна в этой точке, так как из существования $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ с необходимостью вытекает: при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ (иначе указанный предел не мог бы оказаться конечным). Поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du}{dy}$, и, следовательно, указанное правило дифференцирования сложной функции справедливо.*↑

Рассмотрим примеры применения правил дифференцирования.

$$\begin{aligned} \text{Пример 1. } (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Пример 2. Докажем справедливость формулы $(x^n)' = nx^{n-1}$ для натуральных n методом математической индукции.

Имеем при $n = 1$ $(x)' = 1 \cdot x^0 = 1$, т.е. формула верна. Предположим, что она уже доказана для некоторого фиксированного натурального n : $(x^n)' = nx^{n-1}$, и убедимся, что в этом случае она будет верна

и для $(n+1)$: $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n$. Мы применили правило дифференцирования произведения. Значит, доказано, что данная формула верна для всех натуральных n .

Пример 3. Пусть $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Функцию следует рассматривать как сложную (например, в варианте $y = \sqrt{u}$, $u = R^2 - x^2$). Поэтому

$$y' = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Зная последнюю формулу, можно, например, написать уравнение касательной к верхней полуокружности. Пусть дана точка на окружности $M_0(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$, тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-R/\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - R^2/2}} = -1$. Значит, уравнение касательной в точке M_0

будет иметь вид $y - \frac{R}{\sqrt{2}} = -\left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$, т.е. $x + y = \frac{2R}{\sqrt{2}}$ (рис. 112).

Обратим внимание, что не всякая непрерывная функция имеет производную. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$ (так как $\Delta y = |\Delta x|$ и поэтому при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$). Однако в этой точке нет производной. Действительно, взяв $x > 0$, получаем $\Delta y = \Delta x$, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. Но если взять $x < 0$, то $\Delta y = -\Delta x$, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$. Односторонние пределы для точки $x = 0$ не совпадают, значит, предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует. Геометрически это означает, что у графика $y = |x|$ в точке $x = 0$ нет касательной.

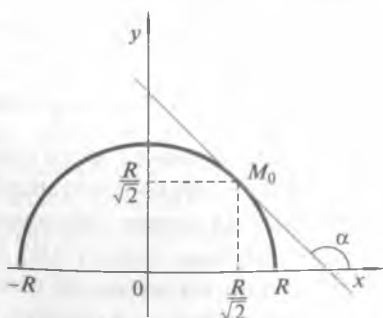


Рис. 112

7.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГОЧЛЕНОМ

Функция, непрерывная в точке x_0 , обладает тем свойством, что $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Более точно взаимосвязь между приращениями функции и аргумента не фиксируется.

Выделим в классе непрерывных функций те, для которых эта взаимосвязь «почти линейна», т. е.

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где A — постоянное число (зависящее только от выбора точки x_0), а $\alpha = \alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$. Понятно, что при малых Δx второе слагаемое будет пренебрежимо мало по сравнению с первым (если $A \neq 0$). Поэтому $\Delta y \approx A \cdot \Delta x$.

Функцию, обладающую данным свойством, называют *дифференцируемой* в точке x_0 , а главную линейную часть $A \cdot \Delta x$ приращения Δy называют *дифференциалом* и обозначают dy .

Заметим, что для дифференцируемой функции

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha,$$

поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$. Значит, $A = y'$.

Если дополнительно договориться, что дифференциал независимой переменной dx (по определению) совпадает с ее приращением Δx , то получаем важную формулу:

$$dy = y' dx.$$

Итак, если функция дифференцируема в данной точке x_0 , то в x_0 у нее существует производная, ее дифференциал может быть вычислен по указанной формуле и использован при малых $dx = \Delta x$ в качестве приближенного значения приращения функции: $dy \approx \Delta y$.

Можно убедиться, что функция, имеющая производную в данной точке x_0 , является дифференцируемой в точке x_0 , причем $dy = y' dx$. Поэтому термин «дифференцируемая функция» можно использовать как эквивалентный понятиям: «функция имеет производную» и «функция имеет дифференциал».

Заметим, что теперь введенное ранее формальное обозначение производной $y' = \frac{dy}{dx}$ можно при желании истолковать и как *отношение дифференциалов*.

Основное прикладное свойство дифференциала можно истолковать и несколько иначе:

$$\Delta y \approx y'(x_0)(x - x_0).$$

Очевидно, что справа записано выражение, которое уже встречалось ранее в уравнении касательной к графику функции: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Это значит, что, заменяя точное приращение функции

ее дифференциалом, мы фактически отсчитываем приращение переменной y по касательной (рис. 113). Или, другими словами, заменяем вблизи точки x_0 функцию $y = f(x)$ линейной функцией $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$. При этом мы, конечно, допускаем ошибку $r(x)$: $\Delta f(x) = y'(x_0)(x - x_0) + r(x)$. Здесь $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ и $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Точность такого приближения исходной функции с помощью линейной в ряде случаев может оказаться недостаточной. И тогда возникает идея взять в качестве приближенного описания многочлен более высокой степени, чем первая, с тем, чтобы повысить эту точность:

$$\Delta f(x) = P_n(x) + r_n(x).$$

Главный вопрос в том, какими критериями следует руководствоваться при построении такого многочлена. Здесь возможны варианты. Мы постараемся добиться наилучшего локального приближения, т.е. в достаточно малой окрестности точки x_0 . Для этого потребуется ввести понятие о *старших производных* данной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке. Тогда ее производная $f'(x)$ снова оказывается функцией от переменной x и можно повторно поставить вопрос о производной. В случае существования последней это будет уже *вторая производная* от исходной функции: $f''(x)$. Используется также обозначение $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Аналогично можно ввести понятие о третьей производной и т.д.

У некоторых функций есть производные любого порядка. Например, для $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y'''' = \sin x$ и т.д.

Поскольку физический смысл производной — скорость, то вторую производную можно истолковать как «скорость изменения скорости», т.е. *ускорение*.

В качестве примера второй закон Ньютона для материальной точки массой m , движущейся по прямой под действием силы F , можно записать в виде $F = m \frac{d^2 s}{dt^2}$.

Возвращаясь к задаче о построении многочлена, приближенно описывающего исходную функцию, договоримся выбирать его так, чтобы в данной точке x_0 у многочлена и функции совпадали не только их

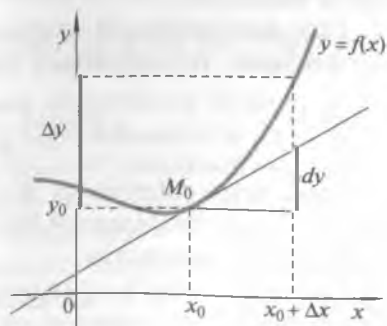


Рис. 113

значения, но и значения первой, второй и других производных, вплоть до n -й. Формулу для такого многочлена можно сразу указать:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

В самом деле, положив $x = x_0$, находим $P_n(x_0) = f(x_0)$. Вычислим производную

$$P'_n(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}.$$

Снова полагаем $x = x_0$ и убеждаемся, что $P'_n(x_0) = f'(x_0)$. Снова дифференцируем и т.д.

Формула, которая возникла при выборе такого многочлена,

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

носит название *формулы Тейлора*. Ее можно считать основной формулой дифференциального исчисления, поскольку с ее помощью можно производить глубокое и многоаспектное исследование локальных свойств дифференцируемых функций.

Очень важно оценивать погрешность $r_n(x)$ замены функции указанным многочленом или, как говорят, *остаточный член* формулы Тейлора.

Для функции, имеющей n производных в точке x_0 , можно утверждать, что членом $r_n(x)$ можно пренебрегать как малым по сравнению с остальными членами многочлена $P_n(x)$, если $\Delta x \rightarrow 0$ (при условии, что они отличны от нуля).

Предположим, например, что существует $f'(x_0)$, а другие свойства функции $f(x)$ неизвестны. Тогда $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + r_1(x)$, причем, если $f'(x_0) \neq 0$, то в вычислениях членом $r_1(x)$ можно пренебрегать при очень малых Δx .

Если дополнительно предположить, что существует еще и $(n+1)$ -я производная, то остаточный член можно записать в виде

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Здесь точка c находится где-то на отрезке между точками x_0 и x ; более определенных сведений о ее расположении данная формула не дает (без доказательства).

Например, если у функции $y = f(x)$ гарантированно существует только первая производная, то

$$\Delta y = f'(c) \cdot \Delta x.$$

Это утверждение носит название теоремы Лагранжа. Аналогично, если существует и вторая производная, можно записать:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''(-)}{2!} \Delta x^2.$$

Приведем в качестве примера следующие полезные приближенные формулы:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!};$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!};$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}.$$

Все они получены из формулы Тейлора в предположении, что $x_0 = 0$, и применимы, если x мало отличается от 0. Погрешность приближения в подобных формулах иногда совсем легко оценить. Например, для первой формулы

$$|r_3(x)| = \frac{|\cos c|}{7!} |x|^7 \leq \frac{|x|^7}{7!}.$$

Поэтому, вычисляя, например, $\sin 1$ по приведенной формуле, мы допустим ошибку, не превосходящую $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} < 0,0002$.

7.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

7.4.1. Исследование функций на экстремум

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Если для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то говорят, что в точке x_0 эта функция имеет *локальный максимум* (рис. 114); аналогично, если $f(x) \geq f(x_0)$, то — *локальный минимум* (рис. 115). Объединенный термин — *экстремум*.

Предположим, что в точке локального экстремума существует производная $f'(x_0)$. Тогда, как было показано ранее, верна формула $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + r_1(x)$, где $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Если Δx мало, то знак Δy определяется первым членом $f'(x_0) \cdot \Delta x$ (при условии, что $f'(x_0) \neq 0$).

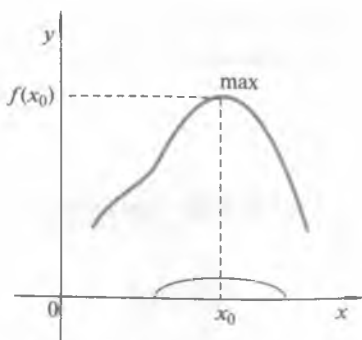


Рис. 114

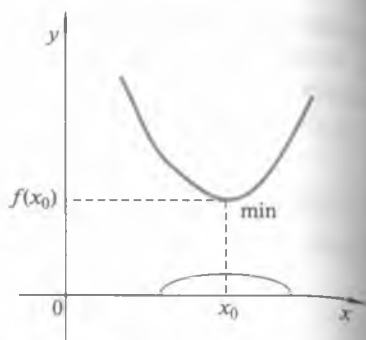


Рис. 115

Однако этот член меняет знак при смене его у Δx (т.е. при изменении смещения из точки x_0 влево или вправо), что невозможно в точке экстремума (где $\Delta y < 0$ в случае максимума и $\Delta y > 0$ в случае минимума). Значит, возможен единственный случай $f'(x_0) = 0$. Итак, справедлива теорема Ферма.

Теорема. В точках локального экстремума дифференцируемой функции ее производная равна нулю. Или, другими словами, обращение в нуль производной функции является необходимым условием ее экстремума.

На практике при исследовании функции этот факт означает, что, желая найти точки локального экстремума дифференцируемой функции, следует решить уравнение $f'(x_0) = 0$. Все искомые точки будут находиться среди таких решений (их иногда называют *стационарными точками*).

Например, для $y = x^3 - 3x^2$ имеем $y' = 3x^2 - 6x$, т.е. стационарные точки определяются решением уравнения $x^2 - 2x = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Полезно подсчитать значения функции в этих точках: $y(0) = 0$;

$y(2) = -4$. Вопрос о том, будут ли это точки экстремума, пока остается открытым. Его можно решить, если воспользоваться специальными достаточными условиями или, например, проведя следующие простые рассуждения.

Заметим, что вблизи точки $x = 0$ поведение функции определяется слагаемым $(-6x^2)$, так как величиной x^3 при малых x можно в сравне-

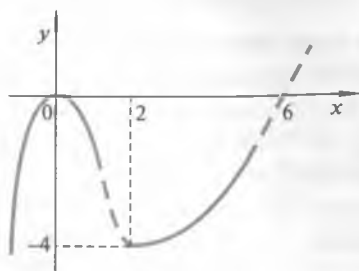


Рис. 116

нии с этим членом пренебречь. Поэтому при $x \approx 0$ график функции будет напоминать параболу с ветвями, направленными вниз (рис. 116). Значит, в точке $x = 0$ функция имеет локальный максимум с максимальным значением, равным нулю. Поскольку $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, рассматриваем лишь одну возможность: в точке $x = 2$ функция имеет локальный минимум с минимальным значением (-4) . На рис. 116 изображен график данной функции.

Примеры показывают, что не всякая стационарная точка является точкой экстремума функции. Например, функция $y = x^3$ имеет производную $y' = 3x^2$, которая обращается в нуль при $x = 0$. Однако значение $y(0) = 0$ не является экстремальным, поскольку в любой окрестности точки $x = 0$ есть как отрицательные, так и положительные значения функции.

Нередко возникает задача нахождения *наибольшего и наименьшего значений* функции $y = f(x)$, заданной на некотором отрезке $[a, b]$. Естественно, что такие значения могут находиться не только в точках локального экстремума, но и на концах отрезка, т.е. среди значений $f(a)$ и $f(b)$. При практическом решении такой задачи обычно вычисляют значения функции во всех точках локального экстремума, присоединяют к ним значения на концах отрезка и выбирают среди полученного набора наибольшее и наименьшее.

Заметим, что мы ведем речь лишь о дифференцируемых функциях. Если хотя бы в одной точке у функции нет производной, наши рассуждения неприменимы. В таких точках у функции также может быть экстремум. Например, у функции $y = |x|$ в точке $x = 0$, очевидно, есть минимум (а производной нет). Функция $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ не имеет производной $\left(y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; x \neq 0 \right)$ и экстремума: ее график в этой

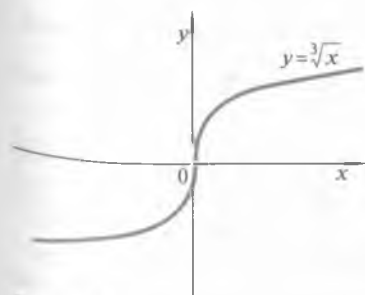


Рис. 117

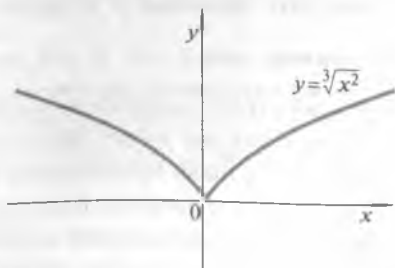


Рис. 118

точке имеет вертикальную касательную (рис. 117). График функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x = 0$ тоже имеет вертикальную касательную, но в точке $x = 0$ у этой функции минимум (рис. 118).

7.4.2. Исследование функции на монотонность

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция. Как ясно из определений монотонной функции (см. подразд. 4.1), $f(x)$ будет строго монотонно возрастающей, если при $\Delta x > 0$ выполняется $\Delta y > 0$, и строго монотонно убывающей, если при $\Delta x > 0$ верно $\Delta y < 0$.

Предположим, что на некотором промежутке $y' > 0$. Тогда по теореме Лагранжа $\Delta y = f'(c)\Delta x$ и, значит, функция строго монотонно возрастает на этом промежутке.

Аналогично при условии $y' < 0$ можно утверждать, что на соответствующем промежутке функция строго монотонно убывает.

Практическое исследование функций на монотонность проводят по следующей схеме: решая уравнение $f'(x) = 0$, находят стационарные точки; определяют знак производной в интервалах между стационарными точками; делают выводы о характере монотонности функции по указанному выше правилу.

Например, рассмотрим функцию $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$. Для нее $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$. Замечаем, что в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$ производная не существует. Поэтому на числовой оси следует отметить эти точки, а не только стационарную точку $x = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, нужно определить знак производной на промежутках $(-\infty, -2)$; $(-2, -\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2}, 1)$; $(1, +\infty)$. Для этого достаточно вычислить значение y' в какой-либо точке из каждого интервала. Например, при $x = 0$ $y' > 0$, значит, на интервале $(-\frac{1}{2}, 1)$ данная функция строго монотонно возрастает.

Если функция имеет производную в окрестности стационарной точки, то по знаку производной слева и справа от этой точки можно сделать вывод о наличии (или отсутствии) экстремума, а также о том, будет ли это максимум или минимум. Действительно, если при переходе через стационарную точку производная меняет знак с «-» на «+», то это значит, что ее монотонное убывание сменяется возрастанием.

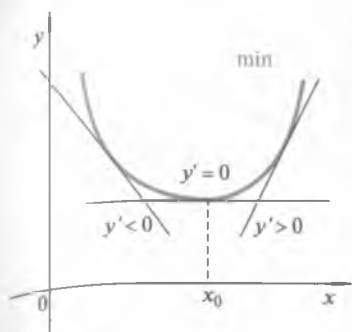


Рис. 119

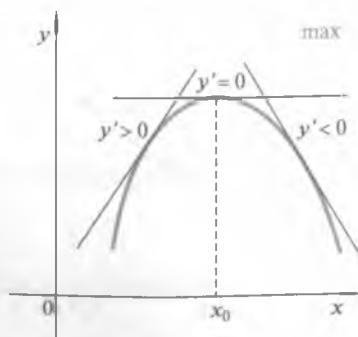


Рис. 120

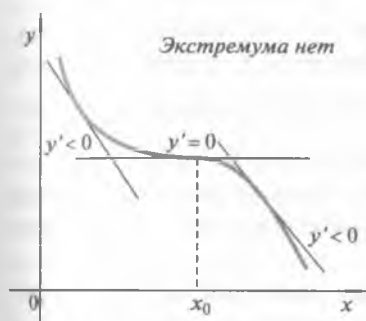


Рис. 121



Рис. 122

нием — точка минимума (рис. 119). Другие возможные случаи показаны на рис. 120 — 122.

Таким образом, смена знака производной в стационарной точке является *достаточным условием* экстремума.

7.4.3. Исследование функции на выпуклость и вогнутость графика

Пусть функция $y = f(x)$ имеет на некотором промежутке две производные, тогда возможно провести еще более глубокое исследование ее поведения, чем это осуществимо с помощью первой производной.

Обратимся к приведенной формуле

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''(c)}{2!} (\Delta x)^2.$$

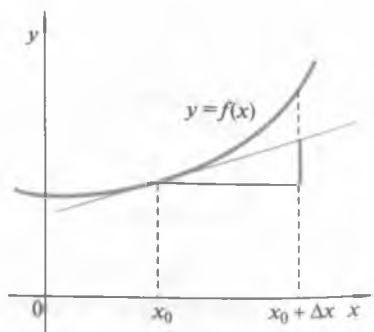


Рис. 123

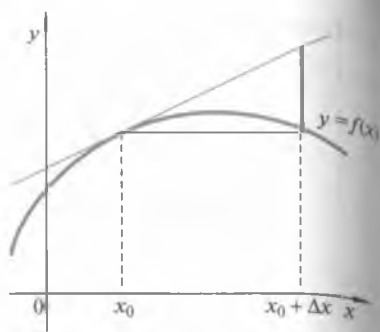


Рис. 124

Замечаем, что член $f'(x_0) \cdot \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$, определяет приращение переменной y относительно касательной к графику функции. Поэтому член $\frac{f''(c)}{2!}(\Delta x)^2$ характеризует разницу между этим приращением и приращением значения функции. Если этот член положителен, то график будет расположен выше касательной, так как $\Delta y > f'(x_0) \cdot \Delta x$ (рис. 123). Кривые, обладающие таким свойством, называют *вогнутыми*.

Аналогично, если $f''(c) < 0$, то кривая *выпуклая*: ее график расположен под касательной в окрестности точки касания (рис. 124).

В приводимых рассуждениях обозначен и признак выпуклости, и признак вогнутости графика дважды дифференцируемой функции на промежутке: $f'' \neq 0$. При $f'' < 0$ имеет место выпуклость, при $f'' > 0$ — вогнутость.

Точки, удовлетворяющие уравнению $f'' = 0$, могут обладать тем свойством, что в них график функции переходит с одной стороны

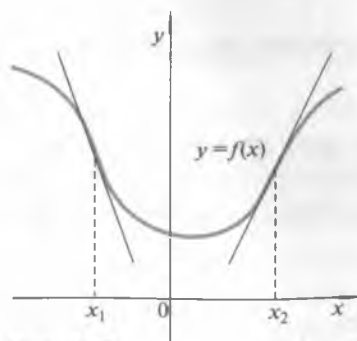


Рис. 125

касательной на другую. Их называют *точками перегиба* (на рис. 125 изображены две такие точки x_1 и x_2).

Такие точки существенно характеризуют поведение графика функции, поэтому их полезно специально рассматривать при ее исследовании.

Заметим, что если x_0 — стационарная точка, то $f'(x_0) = 0$ и тогда знак Δy определяется знаком второй производной.

Таким образом получаем еще одно достаточное условие наличия экстремума в стационарной точке (мы его не доказываем строго):

- если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет локальный максимум;
- если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция имеет локальный минимум.

7.4.4. Комплексная схема исследования функции

К данному моменту наших математических построений накопился довольно большой набор средств, которые могут использоваться при исследовании функциональных зависимостей. Поэтому полезно объединить их в определенный комплекс и представить в виде схемы, которая могла бы задавать общие ориентиры исследования. Например, так:

1. *Исследование области определения функции.* Это, пожалуй, единственная рекомендация, которой нужно настойчиво следовать в начале каждого исследования свойств функций. Нарушение ее существенно затрудняет анализ и может привести к ошибкам.

2. *Выявление существенных классификационных свойств функции.* Например, четности, нечетности, периодичности, если возможно — множества значений функции, ее ограниченности и неограниченности и т.д.

3. *Выявление характерных точек.* Полезно найти точки пересечения графика функции с осью Oy (положив $x = 0$) и с осью Ox (приравняв $y = 0$); обозначить точки разрыва, границы области определения и исследовать поведение функции вблизи них; выявить точки, в которых отсутствует производная, исследовать поведение функции в их окрестностях.

4. *Нахождение стационарных точек.* Решается уравнение $f'(x) = 0$. Для определения интервалов монотонности к стационарным точкам присоединяют точки, в которых не существует производной.

5. *Исследование функции на монотонность.* Оно сводится к определению знака производной на интервалах, которые обозначены на предыдущем этапе.

6. *Исследование функции на экстремум.* Для этого можно использовать достаточные условия. Экстремальные значения вычисляют и обозначают на графике. В случае, если функция определена на

отдельных отрезках, исследуются и значения функции на концах отрезков.

7. *Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика.* Вычисление второй производной полезно и при исследовании функции на экстремум. Если вторая производная имеет не очень сложный вид, то нахождение интервалов выпуклости и вогнутости, а также точек перегиба оказывается весьма эффективным средством изучения поведения функции.

8. *Исследование асимптотического поведения функции.* Речь идет не только о вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптотах, но и о сравнении поведения данной функции с поведением других, более простых. Последнее осуществляется путем использования предельных переходов, пренебрежением малыми «добавками» и т.п. Заметим, что частично такое исследование уже предусматривалось в п. 3.

9. *Уточнение графика функции по точкам.* Все результаты исследования, полученные на предшествующих этапах, рекомендуется сразу же отмечать на графике. Поэтому график изучаемой функции вначале обычно выглядит как эскиз, постепенно уточняемый. На данном этапе производится окончательное уточнение графика, как правило, на участках, где информации о нем недостаточно.

Данную схему можно варьировать в зависимости от конкретных особенностей функции, переставлять отдельные этапы, некоторые из них опускать, какие-то, наоборот, добавлять. Если же, следуя схеме, предусмотреть обозначенное в ней содержание исследования, легко заметить, что отдельные этапы позволяют контролировать правильность рассуждений на других этапах и облегчают их осуществление.

Проиллюстрируем применение данной схемы.

Пример 1. Исследовать и построить график функции

$$y = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

1. Область определения: $x \neq 0$.

2. Четностью, нечетностью или периодичностью данная функция не обладает, но заметим, что общее представление о ее поведении можно получить, складывая графики $y_1 = \frac{1}{x}$ (гипербола) и $y_2 = 4x^2$ (парабола), эту идею мы далее развивать не будем.

3. С осью Oy график не пересекается, так как нельзя принять $x = 0$. С осью Ox пересечение в точке, удовлетворяющей уравнению

$\frac{1}{x} + 4x^2 = 0$, т.е. $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Если приближаться к другой характерной точке: $x = 0$, то ясно, что функция ведет себя подобно гиперболе.

4. Находим стационарные точки: $y' = -\frac{1}{x^2} + 8x$, т.е. есть единственная точка $x = \frac{1}{2}$, в которой $-\frac{1}{x^2} + 8x = 0$.

5. Исследуем знаки производной на интервалах $(-\infty, 0)$; $(0, \frac{1}{2})$; $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Легко обнаружить, что они, соответственно, равны «-»; «-»; «+».

6. Поэтому в стационарной точке $x = \frac{1}{2}$ функция имеет локальный минимум, причем

$$y_{\min} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3.$$

7. Вычислим вторую производную: $y'' = \frac{2}{x^3} + 8$, она обращается в нуль в точке $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Это точка перегиба графика функции, где он переходит с одной стороны касательной на другую, причем угловой коэффициент касательной

$$y'\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} - \frac{8}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{16} - \frac{8}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{12}{\sqrt[3]{4}}.$$

8. Горизонтальных и наклонных асимптот у графика нет, поскольку при больших $|x|$ функция ведет себя подобно $y_2 = 4x^2$ (членом $\frac{1}{x}$ можно в этом случае пренебречь).

9. Суммируя полученные сведения и вычисляя выборочно координаты отдельных точек графика, обнаруживаем, что он имеет вид, изображенный на рис. 126. Соответствующая кривая носит название «трезубец Ньютона».

Пример 2. Исследовать и построить график функции

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0).$$

Эта функция имеет большое значение в теории вероятностей и математической статистике.

Она определена для всех x . Если $a = 0$, то она четная, а при произвольном a кривая будет симметричной относительно вертикальной прямой $x = a$ (поскольку замена x на $x - a$ — это сдвиг вдоль оси Ox на величину a).

С осью Ox график не пересекается, поскольку $e^z > 0$ при любом z . Координату точки пересечения с осью Oy легко подсчитать, положив $x = 0$ (нас эта точка пока не интересует).

Точек разрыва нет.

Находим стационарные точки: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2(x-a)}{2\sigma^2} \right) = 0$ (диф-

ференцируем по правилу вычисления производной сложной функции). Оказалось, что есть стационарная точка $x = a$.

Сразу становится понятным, что в этой точке максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (поскольку $e^0 = 1$). Справа от точки a , т. е. при $x > a$, произво-

дная отрицательная, значит, функция строго монотонно убывает. А слева, наоборот, возрастает.

Замечаем, что $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому у графика есть горизонтальная асимптота, уравнение которой $y = 0$, т. е. это ось Ox .

Теперь даже без вычисления второй производной легко усмотреть, что график имеет две точки перегиба (симметричные относительно $x = a$). Если провести соответствующие вычисления (мы их опускаем),

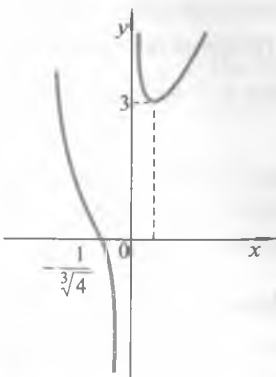


Рис. 126

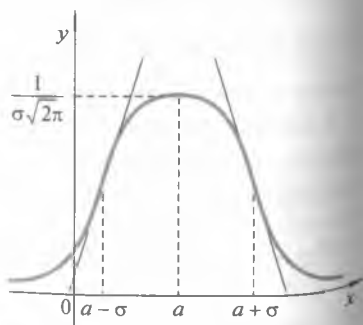


Рис. 127

то оказывается, что это точки $x_1 = a + \sigma$, $x_2 = a - \sigma$. Соответствующие ординаты: $y_1 = y_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

Остается изобразить график этой функции (рис. 127).

7.5. ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

До сих пор речь шла о понятии производной и дифференциала функций одной переменной $y = f(x)$. Совершенно естественно возникает вопрос об аналогичном построении дифференциального исчисления для функций нескольких переменных. Для простоты ограничимся рассмотрением функций двух переменных $z = z(x, y)$, заметив, что логика всех рассуждений полностью сохраняется для функций любого числа независимых переменных $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Могут возникнуть лишь чисто технические усложнения из-за увеличения этого числа.

Итак, пусть в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ определена функция $z = z(P) = z(x, y)$. Если зафиксировать значение одной из переменных, положив, например, $y = y_0$, то $z = z(x, y_0)$ окажется уже функцией только от одной переменной x . Для такой функции может существовать производная z'_x (здесь индекс x указывает на переменную, по которой производится дифференцирование). Она называется *частной производной от функции $z(x, y)$ по переменной x* .

Аналогично можно определить частную производную и по другой независимой переменной z'_y .

Вычисление частных производных не представляет труда, поскольку все независимые переменные, кроме той, по которой производится дифференцирование, считаются постоянными. Например, для функции $z = 3x^2 + 2xy + 4y^2$ имеем: $z'_x = 6x + 2y$ и $z'_y = 2x + 8y$.

По аналогии со случаем функции одной переменной можно определить и дифференциал функции нескольких переменных как главную линейную часть ее приращения. При этом оказывается, что при $z = z(x, y)$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

где частные производные вычисляются в фиксированной точке (x_0, y_0) , т. е. $z'_x = z'_x(x_0, y_0)$, $z'_y = z'_y(x_0, y_0)$ и $dx = \Delta x = x - x_0$; $dy = \Delta y = y - y_0$.

Для существования дифференциала необходимо существование в соответствующей точке частных производных по всем независимым переменным. Однако, в отличие от случая функций одной переменной, это условие не является достаточным.

Главное свойство дифференциала: $\Delta z \approx dz$ в достаточно малой окрестности данной точки.

Геометрический смысл дифференциала связан с существованием касательной плоскости к поверхности $z = z(x, y)$ в данной точке. Касательная плоскость определяется как плоскость, проходящая через данную точку поверхности $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$, и обладающая тем свойством, что угол φ между ней и любой секущей к поверхности, т.е. прямой, проходящей через точки M_0 и M на поверхности, стремится к нулю, если точка M стремится по поверхности к точке M_0 (рис. 128).

Можно показать, что для функции $z = z(x, y)$, имеющей дифференциал в точке M_0 , у соответствующей поверхности существует касательная плоскость, уравнение которой

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

В качестве примера обратимся вновь к уравнению верхней полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Рассмотрим точку $M_0(0, 0, R)$ на этой полусфере. Тогда $z'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ и $z'_y = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, и поэтому $z'_x(M_0) = z'_y(M_0) = 0$. Значит, уравнение касательной плоскости в точке M_0 будет иметь вид $z = R$ (это плоскость, параллельная xOy). Радиус сферы, проведенный в точку касания, будет, очевидно, перпендикулярен этой плоскости. В силу симметрии сферы это свойство

будет иметь место по отношению к любой касательной плоскости.

Вектор, ортогональный к касательной плоскости, называется *нормальным*, а соответствующая прямая, проходящая через точку M_0 , — *нормалью* к поверхности. Из предыдущих рассуждений (см. подразд. 6.2) очевидно, что вектор нормали имеет следующие координаты: $\bar{n}(z'_x, z'_y, -1)$.

Понятие *локального экстремума* для функций нескольких переменных определяется так же, как и для

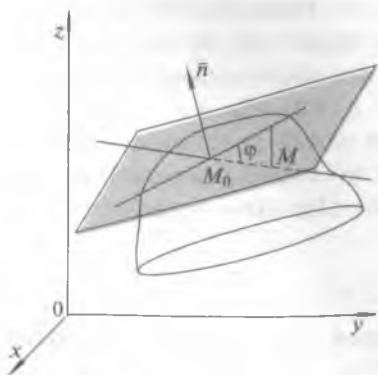


Рис. 128

функций одной переменной. Если экстремум существует в некоторой точке $P_0(x_0, y_0)$, то он будет существовать и для функции $z = z(x, y_0)$ в точке x_0 (так же как и для $z = z(x_0, y)$ в точке y_0). Поэтому *необходимым условием экстремума* для дифференцируемых функций нескольких переменных является обращение в нуль частных производных по всем независимым переменным. Например, для дифференцируемой функции двух переменных $z = z(x, y)$ точки экстремума следует искать среди стационарных точек, т.е. решений системы

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Но это условие не является достаточным.

Пусть, например, данное положительное число A требуется представить в виде суммы трех положительных слагаемых $A = x_1 + x_2 + x_3$ так, чтобы произведение Π этих слагаемых было наибольшим.

Имеем $\Pi = x_1 x_2 (A - x_1 - x_2)$. Находим стационарные точки этой функции:

$$\begin{cases} \Pi'_{x_1} = 0; \\ \Pi'_{x_2} = 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} Ax_2 - 2x_1x_2 - x_1^2 = 0; \\ Ax_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2(A - 2x_1 - x_2) = 0; \\ x_1(A - x_1 - 2x_2) = 0. \end{cases}$$

Возможны следующие случаи:

$$\begin{cases} x_2 = 0; \\ x_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} A - 2x_1 - x_2 = 0; \\ x_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0; \\ A - x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} A - 2x_1 - x_2 = 0; \\ A - x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

т.е. стационарные точки имеют координаты

$$P_1(0, 0); P_2(0, A); P_3(A, 0); P_4\left(\frac{A}{3}, \frac{A}{3}\right),$$

и соответствующие значения для Π будут равны:

$$\Pi(P_1) = \Pi(P_2) = \Pi(P_3) = 0; \Pi(P_4) = \frac{A^3}{27}.$$

Ясно, что нас может интересовать только точка P_4 . Но прежде чем сделать вывод о найденном решении, необходимо проверить, что максимум не достигается на границе области возможного изменения чисел x_1, x_2 .

Для x_1 (аналогично для x_2) выполняется ограничение: $0 \leq x_1 \leq A$. На граничных линиях $\Pi = 0$ и, значит, максимум не достигается. Если допустить возможность выбирать слагаемые x_1, x_2 и x_3 разных знаков, то задача не будет иметь решения, так как произведение Π в этом случае можно сделать сколь угодно большим.

7.6.1. Постановка задачи

Обратимся вновь к формуле Тейлора, записав ее в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x).$$

Эта формула была получена для функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 и имеющей в этой точке n производных. Ясно, что чем больше производных имеет функция, тем выше может быть взята степень многочлена в правой части формулы Тейлора. Но предположим, что $f(x)$ имеет *бесконечно много* производных в точке x_0 . Тогда такой многочлен может иметь сколь угодно высокую степень. При желании функции $f(x)$ в этом случае можно сопоставить символ

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Пока это просто формальная запись, которая лишена точного математического смысла: мы не можем рассматривать такую конструкцию как сумму бесконечного числа слагаемых (поскольку понятие суммы определено лишь для конечного числа слагаемых). Однако придать этой записи точный математический смысл можно, если воспользоваться операцией предельного перехода. Оказывается, это очень полезно, поскольку в предположении, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, функция $f(x)$ оказывается представимой с помощью указанной конструкции, использующей набор простейших степенных функций. В результате возникает возможность вычислять значения функции $f(x)$ с любой наперед заданной точностью, находить решения некоторых уравнений, изучать свойства многих элементарных и неэлементарных функций.

Конструкции, о которых ведется речь, в математике называют *рядами*. Естественно, что можно рассматривать ряды, построенные не только на основе степенных функций, но и на основе других классов функций, а в простейшем случае — даже на основе последовательностей чисел.

7.6.2. Числовые ряды

Рассмотрим вначале, как реализуется указанная выше идея для числовых последовательностей $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Здесь a_i — действитель-

тельные числа ($i = 1, 2, \dots$). Составим *последовательность частичных сумм* (σ_n):

$$\sigma_1 = a_1;$$

$$\sigma_2 = a_1 + a_2;$$

$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n;$$

Назовем эту последовательность *числовым рядом*; a_n — *общим членом* ряда.

Для краткости числовой ряд обозначают

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

или символом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если последовательность (σ_n) сходится, т.е. имеет предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$, то числовой ряд называется *сходящимся*, а s — *суммой* ряда. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Легко усмотреть, что стремление к нулю общего члена ($a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) является **необходимым** условием сходимости ряда.

Действительно, $a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, и если ряд сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-1} = s.$$

Если необходимый признак сходимости ряда нарушен, то ряд заведомо расходится (см. примеры 1—3).

Пример 1. $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2.$

Пример 2. $1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$

Пример 3. $a(1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots) = a \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ при $|q| > 1.$

Ряд, представленный в примере 3, составлен из членов геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q . Он расходится, поскольку $|q| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Однако наличия необходимого признака сходимости ($a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) еще недостаточно для сходимости ряда. В этом убеждает следующий пример.

Пример 4. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. (Заметим, что индекс, по которому производится суммирование, можно обозначать любой буквой.) Частичная сумма этого ряда допускает оценку $\sigma_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. ряд расходится, хотя $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Можно показать, что расходится и следующий ряд.

Пример 5. $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Этот ряд называется *гармоническим*.

Но, конечно, наиболее интересен случай, когда числовой ряд сходится. Вот пример сходящегося ряда.

Пример 6. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Заметим, что $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Поэтому частичная сумма $\sigma_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, это сходящийся ряд и сумма его $s = 1$.

Пример 7. Рассмотрим снова ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, предположив, однако, что $|q| < 1$. Возникает сходящийся ряд. И можно найти его сумму: $\sigma_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \frac{a(1 - q^{n+1})}{1 - q}$; поскольку $q^{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$a \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{a}{1 - q} \quad (|q| < 1).$$

Заметим, что найти точно сумму сходящегося ряда в большинстве случаев не удастся. Главным вопросом в теории числовых рядов является вопрос о том, *сходится ли изучаемый ряд или расходится*. В случае, если доказана его сходимости, найти сумму ряда можно с любой точностью — для этого надо взять частичную сумму с достаточно большим номером.

Естественно, что для ответа на основной вопрос нужны достаточные признаки сходимости или расходимости числовых рядов. Таких признаков найдено довольно много. Самый простой из них — *признак сравнения*. Мы сформулируем его для случая рядов с *положительными членами*.

Признак сравнения. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n > 0, b_n > 0$. Если для всех n выполнено неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого, а из расходимости первого — расходимость второго.

Это утверждение можно считать очевидным, поскольку аналогичное приведенному неравенство будет верно для частичных сумм рядов и сохранится в пределе при $n \rightarrow \infty$.

Для справедливости приведенного утверждения на самом деле требуется значительно меньше: неравенство $a_n \leq b_n$ должно выполняться начиная с некоторого номера, т.е. при $n \geq N$, где N — фиксированное число. Дело в том, что, как легко видеть, любое изменение конечного числа членов ряда не влияет на факт его сходимости или расходимости, хотя, конечно, может изменить сумму.

Пример 8. Для примера сравним два ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и ряд, представленный в примере 6. Отбрасывая в первом из них первый член, получаем ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} + \dots$$

Его члены меньше, чем члены ряда, представленного в примере 6:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Поскольку последний ряд сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Сравнивая ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) с рядом, составленным из членов геометрической прогрессии, можно прийти к весьма удобному признаку Даламбера.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд *сходится*, а при $l > 1$ — *расходится*.

Если $l = 1$, вопрос о сходимости или расходимости ряда остается открытым (признак ответа не дает).

Доказательство признака Даламбера здесь не приводим.

Пример 9. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Здесь x — фиксированное число, $x > 0$. Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1, \text{ т.е. этот ряд сходится.}$$

Пример 10. Рассматривая ряды из примеров 5 и 8, замечаем, что признак Даламбера ответа не дает, поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Однако ряд из примера 5 расходится, а ряд из примера 8 сходится.

Если в данном числовом ряде бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов, то это только увеличивает шансы сходимости ряда, поскольку положительные и отрицательные члены могут, образно говоря, как бы компенсировать друг друга. Поэтому установить сходимость таких рядов можно, используя уже упоминавшиеся ранее признаки, если взять все члены ряда по абсолютной величине. Если построенный таким образом ряд сходится, то сходится и исходный ряд (про него говорят, что он *сходится абсолютно*). Однако возможен случай, когда абсолютной сходимости нет, но исходный ряд тем не менее сходится (про него говорят, что он *сходится условно*).

Интересно заметить, что в условно сходящихся рядах нельзя произвольно переставлять члены (в отличие от абсолютно сходящихся рядов): ряд может стать расходящимся или произвольным образом изменить свою сумму.

Укажем без доказательства только один пример условно сходящегося ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

7.6.3. Функциональные ряды

Пусть дана последовательность функций $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ имеющих единую область определения. По аналогии с предыдущими рассуждениями для нее можно построить *функциональный ряд*:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Для каждого фиксированного x из области определения данный функциональный ряд превращается в числовой и оказывается либо сходящимся, либо расходящимся. Множество точек x из области определения, для которых соответствующий числовой ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Вопрос о виде области сходимости каждого конкретного функционального ряда является главным в теории функциональных рядов. В некоторых случаях его удастся решить в общем виде.

Обратимся, например, к степенным рядам:

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

где x_0 — произвольная фиксированная точка.

Если, в частности, $x_0 = 0$, то степенной ряд имеет вид: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Оказывается, что область сходимости степенного ряда — это промежуток с центром в точке x_0 , т.е. либо отрезок $[x_0 - R, x_0 + R]$, либо интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$, либо полуинтервал одного из видов: $[x_0 - R, x_0 + R)$ или $(x_0 - R, x_0 + R]$, либо вся прямая: $(-\infty, +\infty)$. Кроме того, возможен случай «вырожденного» промежутка, когда $R = 0$, т.е. степенной ряд сходится только в одной точке x_0 , а во всех остальных точках расходится. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Если использовать данное утверждение (приведенное нами без доказательства), то станет ясно, например, что степенной ряд из примера 9 (мы теперь не считаем, что x фиксировано) сходится для всех x , т.е. $R = \infty$.

Применяя признак Даламбера к степенному ряду, члены которого взяты по модулю, на практике часто удается вычислить R . Например,

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

сходится на интервале $(-1, 1)$, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| = |x|.$$

Признак Даламбера гарантирует сходимость при $|x| < 1$ и расходимость при $|x| > 1$, т.е. $R = 1$. Открытым остается вопрос о сходимости ряда при $x = 1$ и $x = -1$. Но в том и другом случае соответствующий

числовой ряд расходится, поскольку не выполнен необходимый признак сходимости.

Сумма функционального ряда представляет собой функцию, определенную в области его сходимости. Про эту функцию говорят, что она *разлагается* в данный функциональный ряд. Для степенного ряда сумма обязательно будет бесконечно дифференцируемой функцией внутри интервала сходимости, поскольку степенной ряд *можно почленно дифференцировать*, т.е. если

$$s(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

то существует $s'(x)$ и верно равенство

$$s'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Это одно из замечательных свойств степенных рядов. Из этого свойства, в частности, вытекает, что при фиксированном x_0 разложение функции в степенной ряд *единственно* и имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Указанный ряд называется *рядом Тейлора*.

Для проверки того, что коэффициенты степенного ряда, в который разлагается функция $f(x)$, имеют приведенный в ряде Тейлора вид, можно повторить рассуждения, использованные в подразд. 7.3 в связи с установлением вида многочлена в формуле Тейлора.

Свойством единственности удобно пользоваться на практике, поскольку разложение функции в степенной ряд часто можно получить различными способами, но независимо от выбора способа разложения обязательно получится один и тот же результат.

Если дана бесконечно дифференцируемая функция, определенная в окрестности точки x_0 , то можно поставить вопрос о ее разложении в степенной ряд. Как показывают специально сконструированные примеры, одного факта бесконечной дифференцируемости для возможности построить такое разложение еще мало: нужно дополнительно проверить условие $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$. Проверить это условие часто удается, используя конкретный вид остаточного члена в формуле Тейлора. Для всех бесконечно дифференцируемых функций, которые

встретятся в данном курсе математики, это условие выполнено, и мы не будем проводить его проверку. Для многих элементарных функций разложение в степенной ряд можно получить непосредственно по виду коэффициентов ряда Тейлора. Не останавливаясь на деталях подобных построений, приведем сводку нескольких наиболее важных разложений. Область сходимости соответствующих рядов легко определяется по признаку Даламбера:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < +\infty,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad |x| < +\infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}; \quad |x| < +\infty,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}; \quad |x| < 1,$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots; \quad |x| < 1,$$

(Этот ряд называется *биномиальным*.)

Естественно, что не только степенные функции оказываются полезными при использовании функциональных рядов. Важный раздел математики возникает при построении разложений функций в *тригонометрические ряды*. Если функция $f(x)$ определена на промежутке длины 2π , например, на отрезке $[-\pi, \pi]$, то речь идет о ее представлении в виде ряда

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Заметим, что в силу периодичности синуса и косинуса этот же ряд может быть использован для представления функции $f(x)$, имеющей период 2π .

Для функций, определенных на произвольном отрезке $[a, b]$, можно рассмотреть аналогичные ряды, построенные на основе си-

стемы тригонометрических функций: $\cos \omega n x$, $\sin \omega n x$, $n = 0, 1, 2, \dots$, с периодом $T = b - a$.

Ограничимся здесь лишь указанием на эту общую идею, поскольку построение разложений функций в тригонометрические ряды использует понятие интеграла, еще не обсуждавшееся в данном курсе. Укажем лишь, что разложение функций в тригонометрический ряд накладывает значительно меньше требований на функцию $f(x)$, чем предъявлялось при разложении ее в ряд Тейлора: достаточно, чтобы функция имела всего одну производную на интервале $(-\pi, \pi)$, причем и это требование может быть значительно ослаблено. Разложение функции в тригонометрический ряд тоже обладает свойством единственности, а коэффициенты ряда могут быть определены по так называемым формулам Фурье.

Для примера приведем без доказательства разложение в тригонометрический ряд функции $y = x^2$ на $[-\pi, \pi]$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \dots \right).$$

Тригонометрические ряды оказываются очень полезным инструментом при исследовании периодических процессов и решении ряда сложных задач из физики.

7.6.4. Примеры использования рядов в вычислениях

Числовые ряды находят широкое применение при вычислении важнейших констант. Например, число e возникло в данном курсе в виде предела некоторой последовательности. Вычислить его значение с помощью этого предела затруднительно. Значительно проще воспользоваться приведенным ранее разложением в ряд функции e^x . Полагая $x = 1$, находим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Если ограничиться выписанными членами разложения, то полученная частичная сумма ряда даст приближенное значение числа e с недостатком: $e \approx 2,717$.

Необходимо оценить погрешность полученного результата. Вот один из вариантов такой оценки:

$$0 < r_n(x) = \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \dots = \frac{1}{6!} \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots \right) < \frac{1}{6!} \left(1 + \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{7} \right)^2 + \dots \right) = \\ = \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{7}{6! \cdot 6} < 0,002.$$

Итак, мы получили оценку числа e : $2,717 < e < 2,719$. Аналогично можно вычислить приближенно и число π , если в разложении для функции $\operatorname{arctg} x$ положить $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$.

В математических справочниках можно найти таблицы многих важных функций (синуса, косинуса, логарифма и т.д.). Составляются такие таблицы чаще всего с использованием разложений соответствующих функций в степенные ряды.

Особый интерес могут представить вычисления с помощью степенных рядов значений некоторых важнейших неэлементарных функций, возникающих при решении прикладных задач. Например, ранее упоминалась функция, играющая важную роль в теории вероятностей, типа e^{-x^2} . Это элементарная функция. Но важна не только она, но и та функция, которая совпадает с указанной после дифференцирования, т.е. функция $\Phi(x)$, удовлетворяющая равенству

$$\Phi' = e^{-x^2}.$$

Эта функция $\Phi(x)$ оказывается уже неэлементарной. Поэтому получить для нее разложение в степенной ряд крайне важно, хотя бы потому, что тем самым создается возможность не только исследовать ее по виду степенного ряда, но и вычислять с любой точностью ее значения. А построить такое разложение оказывается несложно. Запишем вначале соответствующий ряд с неопределенными коэффициентами

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

Можно выписать и разложение в степенной ряд функции e^{-x^2} , если подставить в разложение функции e^x выражение $(-x^2)$ вместо x :

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \dots$$

Поскольку степенной ряд можно почленно дифференцировать, возникает тождество

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots \equiv \\ \equiv 1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \dots$$

Тождество возможно лишь при совпадении коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, т. е.

$$c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -\frac{1}{3 \cdot 1!}, c_4 = 0, c_5 = \frac{1}{5 \cdot 2!}, c_6 = 0, c_7 = -\frac{1}{7 \cdot 3!}, c_8 = 0, \dots$$

$$c_{2k} = 0, c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}, \dots$$

Коэффициент c_0 указанными условиями не определяется. Для однозначного определения функции $\Phi(x)$ потребуется дополнительное условие. Например, можно потребовать, чтобы $\Phi(0) = 1$. Тогда очевидно, $c_0 = 0$. И мы получаем разложение:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}.$$

З а м е ч а н и е. Прием нахождения решения в виде степенного ряда, продемонстрированный в данном примере, относится к разновидности *метода неопределенных коэффициентов*, который применяется во многих разделах математики.

Правда, у данной задачи существует более простое решение: если использовать понятие интеграла (обсуждаемое в гл. 8 курса), то искомое разложение для функции $\Phi(x)$ получается почленным интегрированием ряда, в который разлагается e^{-x^2} . Оказывается, что почленное интегрирование степенных рядов — тоже допустимая операция.

Тригонометрические ряды также используются для представления элементарных функций, например решений некоторых дифференциальных уравнений, моделирующих физические процессы.

Приведенное ранее в качестве примера разложение в тригонометрический ряд функции $y = x^2$ можно использовать довольно неожиданно. Замечаем, что при подстановке $x = \pi$ в это разложение возникает равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

т. е. найдена ранее неизвестная сумма уже знакомого нам числового ряда.

ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

8.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Как ясно из гл. 7, операция дифференцирования, сопоставляющая функции $y = f(x)$ ее производную $f'(x)$, оказалась очень полезной, поскольку позволяет решать многие чисто математические и прикладные задачи. Общая логика математических построений предсказывает, что имеет смысл поставить вопрос об обратной операции, у которой есть большие шансы оказаться не менее полезной. Смысл ее таков: дана функция $f(x)$, на которую мы теперь смотрим как на результат дифференцирования некоторой другой, пока неизвестной функции $F(x)$. Эту функцию надо найти.

Первый вопрос, который возникает: существует ли такая функция $F(x)$ для данной функции $f(x)$, что $F'(x) = f(x)$? Если да, то ее называют *первообразной* для $f(x)$, и возникает второй вопрос: как найти первообразную?

Процедуру нахождения первообразных называют *интегрированием*.

$$F(x) \xrightleftharpoons[\text{Интегрирование}]{\text{Дифференцирование}} f(x) \quad (f(x) = F'(x)).$$

Глубокое исследование вопроса о существовании первообразной можно временно отложить, поскольку операцию дифференцирования мы могли выполнять для любых элементарных функций, и, значит, класс функций, у которых первообразная есть, с практической точки зрения достаточно широк. Задумаемся вначале над тем, сколько может быть первообразных у данной функции, если есть хотя бы одна.

Если к первообразной добавить любое постоянное число, то снова возникает первообразная для той же функции: из $F'(x) = f(x)$ для тождественно постоянной c следует $(F(x) + c)' = f(x)$.

Предположим теперь, что $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для $f(x)$. Тогда для их разности имеем

$$(F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) \equiv 0.$$

Однако функция, у которой производная равна нулю во всех точках, является тождественно постоянной, так как ее приращение при изменении x тождественно равно нулю (это вытекает, например, из теоремы Лагранжа — см. подразд. 7.3). Поэтому делаем вывод: если для функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$, то существует семейство первообразных, зависящее от произвольной постоянной c , имеющее вид $F(x) + c$ и называемое *неопределенным интегралом* от $f(x)$. Причем любые две первообразные для данной функции отличаются лишь постоянным слагаемым. Для обозначения такого семейства первообразных принята запись

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Здесь $\int$ — специальный знак интеграла; $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*.

Далее выяснится, что это на первый взгляд усложненное обозначение имеет глубокий смысл и удобно в использовании.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, поскольку $\left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2$.

Пример 2. Аналогично $\int \sin x dx = -\cos x + c$, поскольку $(-\cos x + c)' = \sin x$.

Из приведенных определений легко усмотреть следующие свойства неопределенных интегралов:

$$1) (\int f(x)dx)' = f(x); d\int f(x)dx = f(x)dx;$$

$$2) \int f'(x)dx = f(x) + c; \int df(x) = f(x) + c$$

(образно говоря, интеграл и дифференциал «уничтожают» друг друга, если соответствующие операции выполняются одна за другой);

$$3) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \text{ где } k — \text{ постоянная;}$$

$$4) \int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Эти свойства проверяются дифференцированием обеих частей равенства (предполагается, что все указанные интегралы существуют). С алгебраической точки зрения они означают, что операция интегрирования (так же как и дифференцирования) является *линейной*.

8.1.2. Простейшие приемы вычисления неопределенных интегралов

Вспомним табл. 2 производных для простейших элементарных функций (не забудьте, что ее надо знать наизусть). Теперь на нее можно взглянуть и как на таблицу интегралов. В самом деле, взяв функции, которые получились в результате дифференцирования, в качестве исходных, замечаем, что соответствующие им функции, от которых вычислялись производные, будут их первообразными. В результате возникает следующая таблица интегралов (мы запишем ее в немного преобразованном виде ради удобства дальнейшего использования).

Таблицу 3 также необходимо выучить наизусть.

Обратим внимание на следующие моменты.

1. Если таблица производных включает в себя производные всех простейших элементарных функций и поэтому с ее помощью и с помощью правил дифференцирования можно вычислить производную любой элементарной функции, то приведенная таблица интегралов

Таблица 3. Интегралы некоторых элементарных функций

1. $\int du = u + c$	2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$	4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c,$ $\int e^u du = e^u + c$
5. $\int \sin u du = -\cos u + c$	6. $\int \cos u du = \sin u + c$
7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c$	8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c$
9. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$	10. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + c$

содержит лишь «избранные» функции под знаком интеграла. В результате пока нет уверенности, что любая простейшая элементарная функция имеет первообразную, тем более элементарную. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся.

2. Если воспользоваться свойствами 3 и 4 интеграла, то ясно, что постоянный множитель можно вносить за знак интеграла (а под ним — и под знак дифференциала) и выносить его, разбивать по интегральному выражению на сумму нескольких выражений, а затем по отдельности вычислять интегралы от слагаемых. Это позволяет вычислить многие интегралы. Например,

$$\int (1 + 3x) dx = \int dx + 3 \int x dx = x + 3 \frac{x^2}{2} + c.$$

3. Мы не случайно обозначили переменную интегрирования буквой u , а не x , имея в виду, что все приведенные формулы будут верны для любой дифференцируемой функции $u = u(x)$. Это замечание существенно расширяет класс функций, для которых интегралы можно вычислять с помощью данной таблицы. Например,

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + c, \text{ здесь } u = \sin x;$$

$$\int \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln |\ln x| + c, \text{ здесь } u = \ln x;$$

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{d(1+x)}{1+x} = \ln |1+x| + c, \text{ здесь } u = 1+x.$$

Использование этого приема вычисления интегралов носит название метода *подстановки*, или *замены переменной*: ради упрощения вычислений в интеграле $\int f(u) du$ можно вместо u подставить функцию $u = u(x)$, у которой существует непрерывная производная $u'(x)$, и наоборот, в исходном интеграле $\int \varphi(x) dx$ можно представлять подынтегральное выражение в виде $f(u) du$ после обозначения $u = u(x)$. Последнее мы уже пояснили примерами. А вот пример другого варианта использования метода.

Подставим вместо x в интеграл $I = \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ выражение au . Тогда получим

$$I = \int \frac{d(au)}{a^2 + (au)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} u + c = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$$

Итак, $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$. Этой формулой можно дополнить таблицу интегралов.

8.1.3. О вычислимости интегралов в классе элементарных функций

Как выяснится далее, возможность вычисления неопределенных интегралов принципиально важна как в теоретическом, так и в прикладном плане, и поэтому исследуется в математике особенно глубоко. К сожалению, соответствующая задача оказывается довольно сложной и не имеет исчерпывающего решения.

Прежде всего должен быть рассмотрен вопрос о классе функций, для которых интегралы существуют. Укажем без доказательства, что в нем заведомо содержится класс непрерывных функций. В частности, интегралы от элементарных функций существуют (поскольку все они непрерывны всюду, где определены).

Однако факт существования вовсе не означает, что все первообразные для элементарных функций находятся в этом же классе: они могут оказаться неэлементарными функциями и поэтому их уже невозможно выразить теми средствами, которыми элементарные функции задаются (конечное число арифметических операций с простейшими элементарными функциями и операций образования из них сложных функций). Например, удалось доказать, что в элементарных функциях нельзя представить интегралы

$$\int \frac{\sin x}{x} dx; \int \frac{dx}{\ln x}; \int e^{-x^2} dx.$$

Некоторые из такого рода интегралов очень важны, поэтому их выражают с помощью более сложных математических конструкций, например с помощью так называемых функциональных рядов, представляющих собой бесконечные суммы функций из некоторых классов (степенных, тригонометрических и др.), либо составляют для них специальные таблицы числовых значений, как, например, для последнего интеграла, часто используемого в теории вероятностей и математической статистике.

Конечно, интегралы, выражающиеся в элементарных функциях, представляют особый интерес. Вычисление их часто оказывается весьма сложной процедурой, поэтому скажем сразу, что существуют обширные таблицы неопределенных интегралов, которыми можно пользоваться при решении практических задач. Любой полноценный

справочник по математике содержит более или менее полные списки из таких таблиц.

Занимаясь самостоятельным вычислением интегралов, никогда не следует забывать о том, что правильность полученного результата всегда легко проверить: достаточно продифференцировать полученную функцию и сравнить производную с подынтегральной функцией.

Для некоторых важных классов элементарных функций существуют теоретически разработанные методы вычисления интегралов. Важнейшим из них является класс *рациональных функций* вида

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x) \text{ и } Q_m(x) \text{ — многочлены. Для этих функций}$$

существует алгоритм (в общем случае довольно сложный), позволяющий вычислить интеграл. Поэтому любой интеграл, в котором подынтегральное выражение с помощью подходящей подстановки может быть преобразовано к виду $R(x)dx$, вычисляется в классе элементарных функций. И для многих случаев соответствующие подстановки рекомендуются математической теорией. Мы ограничимся приведением нескольких примеров.

$$\text{Пример 1. Пусть } I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

$$\text{Замечаем, что } \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \frac{1}{x - a} - \frac{1}{2a} \frac{1}{x + a}, \text{ поэтому}$$

$$I = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x + a} = \frac{1}{2a} (\ln|x - a| - \ln|x + a|) + c$$

(мы заметили, что $\int \frac{dx}{x - a} = \int \frac{d(x - a)}{x - a}$, выполнили замену $u = x - a$ и использовали табличную формулу 3).

Итак, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c$. Последний интеграл уже можно включить в таблицу, пополняя ту, что приведена в подразд. 8.1.2.

Пример 2. Пусть $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$). Сделаем замену $x = a \sin t$, где $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$; $dx = a d(\sin t) = a \cos t dt$. Поэтому $I = a^2 \int \cos^2 t dt$. Воспользуемся формулой $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, получим

$$I = a^2 \int \frac{dt}{2} + a^2 \int \frac{\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \int \cos 2t d(2t) = \\ = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^4}{4} \sin 2t + c = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + c.$$

Интегрирование завершено, но необходимо вернуться к старой переменной, учитывая, что $t = \arcsin \frac{x}{a}$ (так как $\sin t = \frac{x}{a}$).

Имеем $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, значит, окончательно

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

Пример 3. Пусть $I = \int \frac{dx}{\sin x}$. В тех случаях, когда под интегралом находится функция, рациональная относительно $\sin x$ и $\cos x$, представить подынтегральное выражение в виде $R(x)dx$ можно с помощью так называемой универсальной подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда, как не сложно проверить, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ (использованы формулы тригонометрии). Выполнив такую подстановку для I , получим

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c,$$

т.е.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$$

* Кроме приведенных ранее существует еще один метод интегрирования, далеко не универсальный, но весьма эффективный для некоторых интегралов. Его называют *методом интегрирования по частям*.

Известно, что для двух дифференцируемых функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Вычислив интегралы от обеих частей последнего равенства, находим

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Это и есть формула интегрирования по частям. Цель ее применения в том, чтобы представить исходный интеграл $\int f(x) dx$ в виде $\int u(x) dv(x)$,

таким, что $\int v(x)du(x)$ окажется проще для вычисления по сравнению с исходным. Если это удастся сделать, применение метода оправдано.

Например, если $I = \int x \ln x dx$, то, положив $u = \ln x$ и $xdx = dv$, находим

$du = \frac{dx}{x}$ и $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$ (постоянную c здесь можно положить равной нулю) и поэтому

$$I = \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

Если бы мы захотели проверить правильность вычислений, то подсчитали бы:

$$\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \right)' = \frac{2x}{2} \ln x + \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = x \ln x. \quad \uparrow^*$$

8.2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Понятие неопределенного интеграла возникло из чисто математической постановки задачи об операции, обратной дифференцированию. Теперь рассмотрим ряд чисто прикладных задач, на первый взгляд никак не связанных с предыдущими построениями. Однако эти задачи приведут нас к понятию интеграла, тесно взаимосвязан-

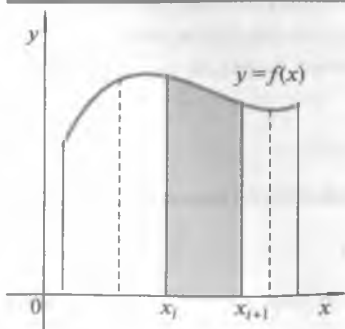


Рис. 129

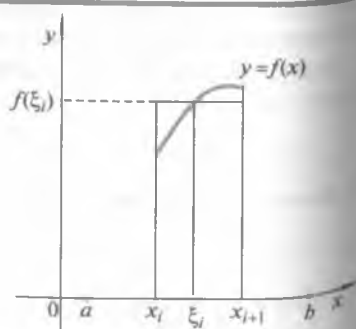


Рис. 130

ного с неопределенным. Эта взаимосвязь чрезвычайно значима, поскольку открывает возможность решения многих важных и сложных задач прикладной математики.

1. Предположим вначале, что нам требуется вычислить площадь фигуры (связанной с графиком функции $y = f(x)$) на отрезке $[a, b]$) типа, изображенной на рис. 129 и называемой *криволинейной трапецией*.

Несложно решить эту задачу приближенно, если разбить отрезок $[a, b]$ точками x_i ($i = 1, \dots, n$): $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$. Тогда каждую частичную криволинейную трапецию, связанную с участком $[x_i, x_{i+1}]$, можно приближенно считать прямоугольником с высотой $f(\xi_i)$, где ξ_i — любая точка на $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 130), и поэтому для ее площади верна приближенная формула $\Delta S_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Значит, приближенное решение задачи дается формулой

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Для повышения точности результата следует измельчать разбиения отрезка $[a, b]$, добиваясь, чтобы $\lambda \rightarrow 0$, где $\lambda = \max \Delta x_i$. В пределе возникает точное решение: площадь криволинейной трапеции

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

2. Обратимся к другой задаче. Пусть вдоль прямой движется точка с переменной скоростью $v = v(t)$, где t — время, а $v(t)$ — непрерывная функция. Спрашивается, какой путь она пройдет за период времени $[t_0, T]$.

Если бы скорость была постоянной, то путь можно было бы подсчитать (по формуле для равномерного движения) как произведение скорости на время движения. Для всего отрезка времени $[t_0, T]$ эта формула в общем случае неприменима, однако ее можно использовать как приближенную на малом отрезке времени $[t_i, t_{i+1}]$, где скорость меняется мало. В качестве постоянного значения скорости в этом случае можно взять $v(\xi_i)$, где ξ_i — произвольная точка на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. И дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в решении предыдущей задачи. Поэтому получаем следующую формулу для пути, пройденного точкой с переменной скоростью:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} v(\xi_i) \Delta t_i, \text{ где } \lambda = \max_i (t_{i+1} - t_i).$$

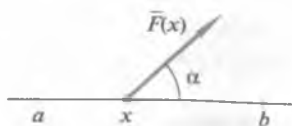


Рис. 131

3. Пусть материальная точка движется вдоль прямой на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке x этого отрезка на нее действует сила $\vec{F}(x)$. В общем случае вектор $\vec{F}$ образует с осью Ox переменный угол $\alpha = \alpha(x)$. Переменна и величина силы $|\vec{F}(x)|$. Требуется подсчитать A — работу силы (рис. 131).

Если бы сила была постоянной (как по величине, так и по направлению), то, как известно, работу можно было бы подсчитать взяв произведение пройденного пути на проекцию силы на ось Ox . В предположении, что $\vec{F}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ (по величине и направлению), данной формулой можно воспользоваться как приближенной для малого участка $[x_i, x_{i+1}]$ отрезка $[a, b]$. В итоге, повторяя описанную в предыдущих задачах схему рассуждений для искомой работы, получаем формулу

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |\vec{F}(\xi_i)| \cos \alpha(\xi_i) \Delta x_i.$$

8.2.2. Понятие определенного интеграла и его свойства

При решении этих задач повторялась одна и та же математическая схема рассуждений. Оказывается, что она применима в очень многих прикладных задачах и поэтому заслуживает чисто математического описания.

Пусть ограниченная функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок точками x_i ($i = 1, \dots, n$):

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b,$$

на каждом участке длины $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ выберем произвольно точку ξ_i и составим сумму, называемую *интегральной*:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Обозначим $\lambda = \max_i \Delta x_i$ и будем неограниченно измельчать разбиения, добиваясь, чтобы $\lambda \rightarrow 0$.

Если существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек ξ_i , то функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, а число $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ — *определенным интегралом*.

от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)dx$. Число a называют нижним пределом интегрирования, b — верхним.

Заметим, что введенное обозначение (да и само название) указанного предела обладает пока ничем не оправданным сходством с обозначением неопределенного интеграла. Однако оно, конечно, не является случайным, а имеет глубокий смысл, о котором речь пойдет далее.

Обратим внимание также на требование ограниченности функции $f(x)$. Легко видеть, что это *необходимое условие* для существования интеграла (при его нарушении σ можно было бы сделать сколь угодно большой за счет выбора точек ξ_i).

Пользуясь введенным обозначением, можно записать полученные выше формулы в виде:

■ $S = \int_a^b f(x)dx$ — площадь криволинейной трапеции (*геометрический смысл* определенного интеграла для случая $f(x) > 0$);

■ $S = \int_{t_0}^T v(t)dt$ — путь, пройденный точкой по прямой с переменной скоростью;

■ $A = \int_a^b |\vec{F}(x)| \cos \alpha |dx$ — работа переменной силы.

Из определения интеграла, свойств сумм и пределов легко усмотреть справедливость следующих *свойств* определенного интеграла (предполагаем, что все записанные ниже интегралы существуют):

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (так как при перестановке пределов интегрирования меняется знак у всех Δx_i). Учитывая это свойство, следует положить по определению $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. Если $a < b$ и $f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$.

3. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то для любой точки c внутри отрезка верно равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$4. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

$$5. \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Значит, определенный интеграл является линейным отображением множества интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций в числовое множество.

$$6. \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

$$7. \text{ Если } m \leq f(x) \leq M \text{ и } a < b, \text{ то } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Данное неравенство можно считать оценкой интеграла, к которой приходится нередко прибегать в тех случаях, когда точное значение интеграла получить не удается.

8. Если $m \leq f(x) \leq M$, то существует число $m \leq \mu \leq M$, такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Это число называют *средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$* , а данное утверждение — *теоремой о среднем*.

В частности, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует точка c ($a < c < b$), такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a),$$

т.е. функция в некоторой точке принимает свое среднее значение.

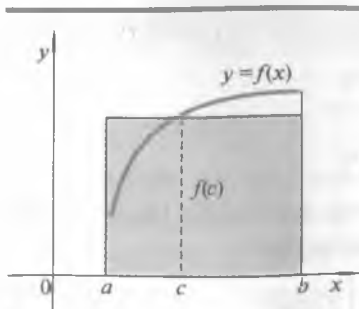


Рис. 132

Данное утверждение имеет простой геометрический смысл (рис. 132): площадь прямоугольника с основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$ точно равна площади криволинейной трапеции.

В теоретическом плане крайне важны *достаточные условия существования определенного интеграла*. Мы не будем рассматривать их с доказательством и укажем лишь важнейшие факты:

- функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема;
- ограниченная функция, имеющая на отрезке $[a, b]$ разве лишь конечное число разрывов I рода (скачков), интегрируема;
- ограниченная и монотонная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема.

8.2.3. Формула Ньютона — Лейбница. Вычисление определенных интегралов

Как мы видели, $\int_a^b f(x)dx$ является некоторым числом. То же самое число получится, если переменную интегрирования обозначить другой буквой, например t : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$. Однако если мы будем считать переменными один или оба предела интегрирования, то определенный интеграл окажется функцией от пределов интегрирования.

Пусть, например, существует $\int_a^b f(t)dt$. Возьмем произвольную точку $a \leq x \leq b$ и будем считать ее переменной. Тогда возникает *интеграл с переменным верхним пределом*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. В этом случае легко показать, что $\Phi(x)$ имеет производную $\Phi'(x)$, причем $\Phi'(x) = f(x)$. Действительно, зафиксируем временно значение x и дадим ему приращение Δx . По теореме о среднем: $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c) \cdot \Delta x$, где c расположена на отрезке $[x, x + \Delta x]$ и поэтому

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c) \Delta x,$$

или $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$. В последнем равенстве перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда $c \rightarrow x$ и, в силу непрерывности $f(t)$, имеем $\lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$.

Поскольку по определению $\Phi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$, получаем оконча-
тельно

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доказан важный факт.

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет первообразную, примером которых может служить интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t)dt$.

В частности, получено достаточное условие существования неопределенного интеграла $\int f(x)dx$ — непрерывность функции $f(x)$ (рассмотрение условий существования таких интегралов в подразд. 8.1.1 было отложено).

Возьмем произвольную первообразную $F(x)$ для непрерывной функции $f(x)$. Поскольку любые две первообразные отличаются друг от друга лишь постоянными слагаемыми, имеем $\int_a^x f(t)dt = F(x) + c$.

Постоянную c в этом равенстве можно определить, если учесть, что $\int_a^a f(x)dx = 0$, поэтому $0 = F(a) + c$, т. е. $c = -F(a)$. Значит,
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

В частности, при $x = b$ получаем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(мы снова обозначили переменную интегрирования буквой x).

Полученная формула носит название *формулы Ньютона — Лейбница*. Это одна из самых замечательных формул, открытых за всю историю человечества. Она устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралом, создавая тем самым возможности эффективного вычисления определенных интегралов, которые в свою очередь, имеют широчайшую сферу практических приложений.

Смысл формулы очень простой: при вычислении определенного интеграла достаточно найти любую первообразную для подынтегральной функции и вычислить ее приращение на отрезке, по которому производится интегрирование.

Иногда формулу Ньютона — Лейбница записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.$$

Здесь $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, при вычислении приращения которой вначале надо подставить вместо x в $F(x)$ верхний предел интегрирования и вычесть из полученного значения результат подстановки в $F(x)$ нижнего предела.

З а м е ч а н и е. Формула Ньютона — Лейбница в приведенной нами записи требует пояснений о наличии связи между функциями $f(x)$ и $F(x)$. Она верна лишь в предположении, что $f(x) = F'(x)$. В принципе данный факт можно было бы отразить и в самой формуле:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Например,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x dx &= -\cos x|_0^{\pi} = \\ &= -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Геометрический смысл полученного результата — площадь криволинейной трапеции, ограниченной первой аркой синусоиды, равна 2 (рис. 133).

Однако формула Ньютона — Лейбница не исчерпывает полностью проблем вычисления определенных интегралов. Во-первых, для некоторых (разрывных) функций первообразная может не существовать, хотя соответствующий определенный интеграл существует. Во-вторых, иногда приходится вычислять интегралы, для которых подынтегральная функция задана не аналитическим, а каким-либо иным образом (табличным, графическим и т. д.). В этой связи разработаны различные приближенные методы вычисления определенных интегралов. Самые простые из них используют геометрический смысл интеграла — площадь криволинейной трапеции, которую можно подсчитать приближенно многими способами.

Например, таким: разобьем отрезок $[a, b]$ на равные участки длины

$h = \frac{b-a}{n}$ и, подсчитав значения y_i

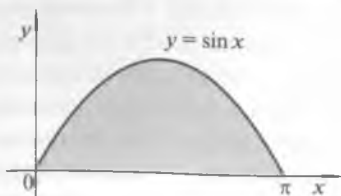


Рис. 133

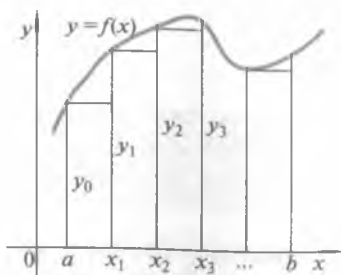


Рис. 134

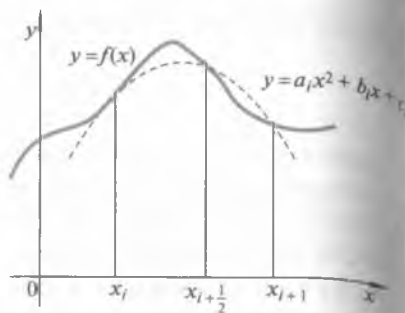


Рис. 135

($i = 0, 1, \dots, n-1$) в точках деления, заменим криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из прямоугольников (рис. 134). Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

Эта приближенная формула носит название *формулы прямоугольников*. На практике ее используют редко, поскольку естественно ожидать, что, взяв вместо прямоугольников обычные трапеции, мы практически при том же объеме вычислений получим более точный результат.

Но и *формула трапеций*, которая в таком варианте возникает, не является наилучшей. Оказывается, что самой удачной приближенной формулой будет та, которая получается, если через тройки соседних точек на графике функции, возникающих в результате разбиения отрезка $[a, b]$, проводить параболы с вертикальной осью (рис. 135), вычисляя соответствующие коэффициенты a_i , b_i , c_i в уравнении парабол $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$.

Соответствующая формула носит название *формулы парабол*, или *Симпсона*. Ценность ее не только в повышенной точности, но и в удобстве оценки погрешности приближенного вычисления (заметьте, что оценка погрешности очень часто оказывается самой сложной частью задачи, связанной с приближенными вычислениями).

Мы не приводим здесь вида формулы парабол, поскольку ее редко применяют для «ручного» счета, а пользуются готовыми компьютерными программами, которые чаще всего предусмотрены наиболее популярными компьютерными пакетами средств прикладной математики.

8.3.1. Вычисление площадей фигур

Говоря о вычислении площади криволинейной трапеции, мы, по сути дела, опирались на интуитивное понятие о площади. В самом деле, на данном этапе наших построений можно говорить лишь о том, что строго определено понятие площади многоугольника. Что понимать под площадью плоской (криволинейной) фигуры — вопрос пока открытый. Наметим путь, следуя которому можно расширить класс плоских фигур, имеющих площадь.

Предположим, что плоская фигура может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций (расположенных как по отношению к оси Ox , так и, возможно, по отношению к оси Oy), ограниченных непрерывными кривыми.

Например, на рис. 136 фигура разбита на три части, из которых (3) — «обычная» криволинейная трапеция, (1) — криволинейная трапеция, симметричная «обычной» относительно оси Ox , а (2) — «обычная» криволинейная трапеция, рассматриваемая относительно оси Oy (разбиение, очевидно, можно было бы сделать и другим способом).

Площадь такой фигуры можно определить как сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций. Таким образом, вопрос о площади фигуры сводится к понятию площади криволинейной трапеции.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками x_i , как описано ранее, и на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ рассмотрим наименьшее значение функции $m_i = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и наибольшее значение:

$$M_i = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Затем рассмотрим две ступенчатые фигуры, составленные из прямоугольников с основаниями $[x_i, x_{i+1}]$ и высотами m_i, M_i , первая из них будет содержаться в исходной криволинейной трапеции, вторая — содержать ее (рис. 137).

Рассмотрим пределы площадей этих ступенчатых фигур при $\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda = \max \Delta x_i$). Эти пределы существу-

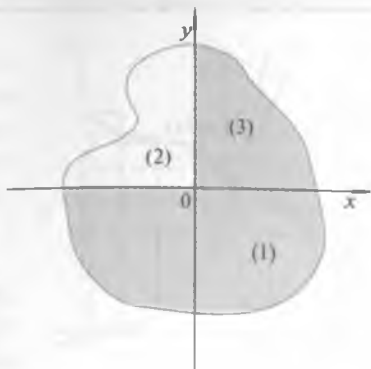


Рис. 136

ют для каждой из ступенчатых фигур и совпадают, поскольку площади таких фигур являются интегральными суммами для интеграла $\int_a^b f(x)dx$, который существует в случае непрерывности функции $f(x)$.

Если теперь определить площадь криволинейной трапеции как любой из указанных пределов, то мы одновременно получаем не только факт существования площади криволинейной трапеции, но и известную вычислительную формулу: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Остается заметить, что для фигуры типа (1) (см. рис. 136) площадь можно вычислить по формуле $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$, а для фигуры типа (2) —

по формуле $S = \int_c^d \varphi(y)dy$, где $x = \varphi(y)$ — линия, задающая криволи-

нейную трапецию относительно оси Oy . Тогда площадь любой фигуры, допускающей упомянутое разбиение, может быть вычислена с помощью определенных интегралов.

Заметим, что можно еще несколько расширить класс фигур, имеющих площадь, если определить площадь как общую границу двух множеств: площадей всевозможных многоугольников, содержащихся в данной фигуре и содержащих ее. Здесь не будем проводить эти более общие рассуждения, поскольку они имеют лишь чисто теоретическое значение.

Рассмотрим примеры.

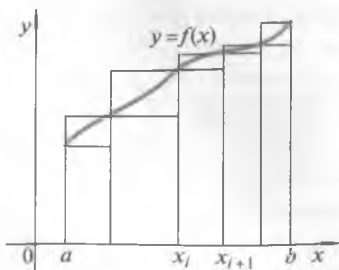


Рис. 137

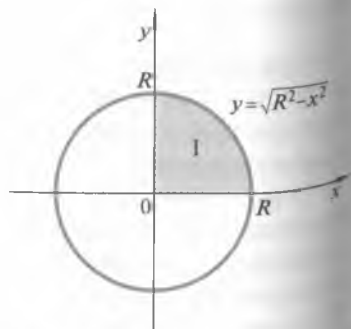


Рис. 138

Пример 1. Пусть требуется вычислить площадь круга радиуса R (рис. 138).

Понятно, что достаточно вычислить площадь четверти круга (на рисунке выделена цветом). Имеем $S = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Первообразную для подынтегральной функции мы уже вычислили в примере 2 подразд. 8.1.3 (вместо R там использовалась постоянная a):

$$F(x) = \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Поэтому $S = 4(F(R) - F(0)) = 4 \left(\frac{R^2}{2} \arcsin 1 - 0 \right) = \pi R^2$, так как

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Вычислим площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = x^3$. Для этого достаточно из площади криволинейной трапеции, образованной кривой $y = x^2$, вычесть площадь криволинейной трапеции, образованной кривой $y = x^3$ (рис. 139), т.е.

$$S = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

До сих пор шла речь о площади плоских фигур. Естественно было бы обобщить постановку вопроса, обратившись к понятию *площади поверхности*. Это понятие значительно сложнее. Мы ограничимся рассмотрением его лишь для частного случая — поверхности вращения.

Рассмотрим вначале площадь боковой поверхности конуса, которую определим как площадь развертки конуса, которая возникает, если боковую поверхность разрезать по образующей, например по линии $z = ky$ (см. подразд. 6.4.2), и развернуть на плоскости.

Возникает круговой сектор, радиус которого l — длина образующей конуса, а площадь будет пропорциональна той доле длины окружности $2\pi l$, кото-

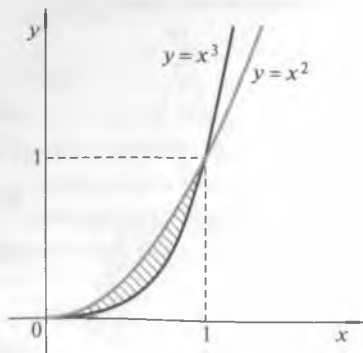


Рис. 139

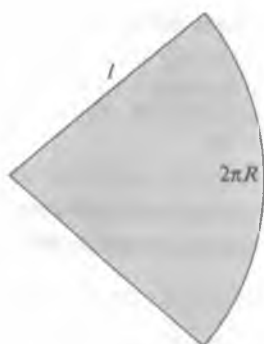


Рис. 140

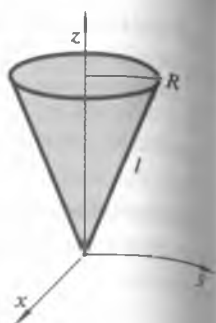


Рис. 141

рую составляет дуга $2\pi R$. Здесь R — радиус основания конуса (рис 140, 141). Таким образом,

$$S = (\pi l^2) \frac{2\pi R}{2\pi l} = \pi l R.$$

Заметим, что наша аргументация не является математически строгой. Тем не менее мы имеем право формально определить площадь боковой поверхности конуса равенством $S = \pi l R$, поскольку это не приведет к противоречию с результатами строгой математической теории площадей поверхностей.

Далее нам понадобится и формула для вычисления боковой поверхности усеченного конуса, которую можно подсчитать как разность площадей для исходного и отсеченного конуса (рис. 142). Пусть у исходного конуса R_2 — радиус основания и l_2 — образующая, а у отсеченного — R_1 и l_1 . Имеем

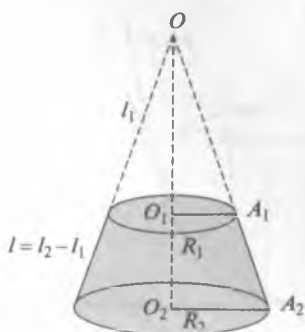


Рис. 142

$$S_{\text{ус.к}} = \pi(l_2 R_2 - l_1 R_1) = 2\pi \frac{(R_2 + R_1)}{2} l,$$

где $l = l_2 - l_1$ (при переходе к последней записи мы учли, что из подобия треуголь-

ников $O_1 O A_1$ и $O_2 O A_2$ верно $\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2}$, т.е. $l_1 R_2 - l_2 R_1 = 0$).

Прямой круговой цилиндр можно рассмотреть как частный (и предельный) случай усеченного конуса, когда $R_1 = R_2$.

и $l = h$ — высота цилиндра. Поэтому для его боковой поверхности верна формула $S = 2\pi Rh$.

Теперь можно получить общую формулу для площади поверхности вращения. Предположим, что кривая $y = f(x)$, определенная на $[a, b]$ и такая, что $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, вращается вокруг оси Ox . Разбиваем, как обычно, отрезок $[a, b]$ точками x_i и для каждого участка $[x_i, x_{i+1}]$ рассматриваем хорду, соединяющую соответствующие точки разбиения кривой. Возникает ломаная линия, вписанная в исходную кривую (рис. 143). Каждое ее звено длины l_i при вращении образует боковую поверхность усеченного конуса, площадь которой мы уже знаем:

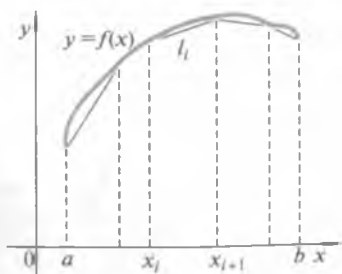


Рис. 143

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i,$$

где $l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ (по теореме Пифагора) или, учитывая теорему Лагранжа (см. подразд. 7.3), $l_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$.

Площадь поверхности вращения можно по определению положить равной пределу суммарной площади указанных боковых поверхностей усеченных конусов при $\lambda \rightarrow 0$, т. е.

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Указанная сумма несущественно отличается от интегральной, и можно строго доказать, что в пределе получим

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Стоит заметить, что попутно мы получили возможность легко вывести еще одну важную формулу. Если определить длину кривой как предел периметра вписанной в нее ломаной при условии, что длина наибольшего звена стремится к нулю, то подсчитать эту длину можно по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

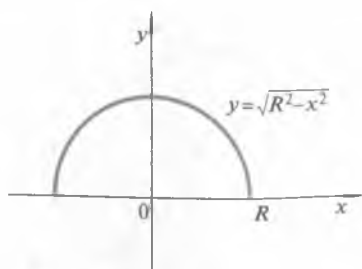


Рис. 144

Это немедленно вытекает из того факта, что длина такой ломаной может быть выражена интегральной суммой $\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$ для указанного интеграла.

Подсчитаем для примера длину окружности и площадь сферы (рис. 144).

Для длины окружности имеем

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}, \text{ поэтому}$$

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \\ &= 4R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что первообразной для подынтегральной функции будет $F(x) = \arcsin \frac{x}{R}$. Поэтому $l = 4R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = 4R \frac{\pi}{2} = 2\pi R$.

Для площади сферы получаем

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4\pi R \int_0^R dx = 4\pi R^2.$$

8.3.2. Вычисление объемов

Понятие определенного интеграла позволяет вычислять объемы некоторых тел, в частности тел вращения. Для пространственных фигур более общего вида таких интегралов уже недостаточно: требуется введение понятия о так называемых *двойных* интегралах (определяемых для функций двух независимых переменных) и даже *тройных* интегралов.

Объем — это мера пространственных фигур, строгое определение которой может опираться на понятие объема многогранника: по аналогии с понятием «площадь» можно рассматривать классы многогранников, содержащихся в данной фигуре и содержащих ее. Общая граница множеств их объемов и называется объемом данной фигуры.

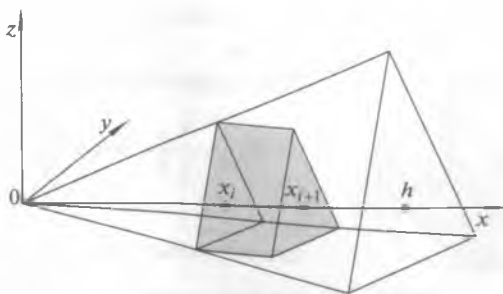


Рис. 145

Ясно, что построение теории объемов многогранников должно предшествовать построению указанной общей теории, оно, в свою очередь, опирается на понятие объема прямоугольного параллелепипеда, которое определяется как произведение его измерений: $V = abc$.

Мы не будем детально строить такую полноценную теорию объемов, поскольку не располагаем упомянутой расширенной теорией интегрирования. И воспользуемся этим обстоятельством, чтобы несколько упростить рассуждения, поставив своей целью только рассмотрение объемов тех стереометрических тел, о которых речь шла в подразд. 6.4.

Начнем с того, что по определению будем считать, что *объем пирамиды равен произведению площади ее основания на высоту*. Исходя из этого, вычислим объем пирамиды.

Для простоты вновь рассмотрим пирамиду типа той, что изображена на рис. 101 в подразд. 6.4.1 (рис. 145).

Разобьем отрезок $[0, h]$ точками x_i и, выбрав сечение пирамиды в точке x_i за основание призмы с высотой $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, заменим исходную пирамиду ступенчатой фигурой, составленной из таких призм.

В пределе при $\lambda = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ объем такой ступенчатой фигуры будет определять объем пирамиды:

$$V_{\text{пир}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} S_i \Delta x_i.$$

Здесь S_i — площадь указанных сечений пирамиды, которую можно подсчитать по формуле, полученной в подразд. 6.4: $S_i = \frac{x_i^2}{h^2} S$, где

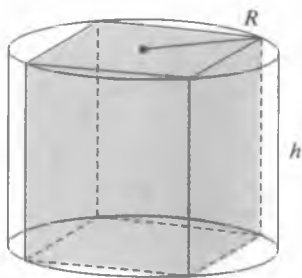


Рис. 146

S — площадь основания пирамиды, а h — ее высота.

По определению интеграла имеем

$$V_{\text{пир}} = \int_0^h \frac{x^2}{h^2} S dx = \frac{S}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} Sh.$$

Значит, объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади ее основания на высоту.

Несложно подсчитать и объем кругового цилиндра: в круг основания можно вписать правильный n -угольник и определить объем цилиндра как предел при $n \rightarrow \infty$ объема вписанной в цилиндр соответствующей призмы (рис. 146).

Ясно, что $V_{\text{цил}} = 2\pi Rh$, где R — радиус основания цилиндра и h — его высота.

Рассмотрим теперь тело вращения, возникающее при вращении вокруг оси Ox непрерывной кривой $y = f(x)$. Взяв его сечения в точках x_i (круги радиуса $f(x_i)$), можно по аналогии с предыдущими построениями заменить это тело ступенчатым, состоящим из цилиндров высотой $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, с основаниями — указанными сечениями.

Объем такого ступенчатого тела, очевидно, равен

$$V = \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i.$$

Поэтому в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ получаем следующую формулу для объема тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Найдем для примера объем конуса (рис. 147):

$$V_k = \pi \int_0^h (kx)^2 dx = \pi k^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi k^2 h^3.$$

Или, заметив, что для радиуса основания конуса верна формула $R = kh$, находим $V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, т.е. объем конуса равен произведению $\frac{1}{3}$ площади основания на высоту.

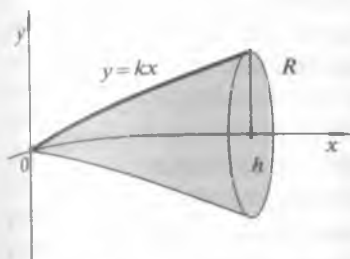


Рис. 147

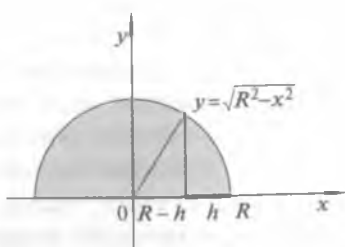


Рис. 148

Приведем один пример: вычислим объем шара и его частей (рис. 148).

Будем вращать вокруг оси Ox полуокружность $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Получим

$$V_{\text{ш}} = 2\pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Если ограничиться вращением дуги, расположенной над отрезком $[R-h, R]$, то возникает шаровой сегмент. Его объем выражается интегралом

$$V_{\text{ш. сег}} = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

Если присоединить к шаровому сегменту конус с вершиной в центре шара и тем же основанием — сечением шара в плоскости $x = R-h$, то возникает шаровой сектор. Легко подсчитать, что его объем выражается формулой

$$V_{\text{ш. сег}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

8.3.3. Другие применения определенных интегралов

Мы уже многократно использовали в прикладных задачах ту схему рассуждений, которая привела к понятию определенного интеграла. С математической точки зрения безразлично, каков качественный смысл соответствующих функций: они могут иметь геометрическое или физическое истолкование (как мы это видели на при-

мере решения задач о пути точки, движущейся с переменной скоростью, или о работе переменной силы). Важно только, чтобы вычисляемая величина могла быть представлена сколь угодно точно суммой, названной выше интегральной. Поэтому сфера приложений интегралов чрезвычайно широка. Особенно богаты приложения в физике: оказывается, что с помощью определенных интегралов могут вычисляться: масса, распределенная неравномерно вдоль стержня, статические моменты пластинок в виде криволинейных трапеций относительно осей координат, их моменты инерции, координаты центра тяжести и т.д.

Приведем в качестве примера задачу о вычислении *массы неоднородного стержня* плотностью $\rho = \rho(x)$, $a \leq x \leq b$.

Если стержень однородный, то плотность его постоянна и масса m равна произведению плотности на длину стержня. Этой формулой можно воспользоваться как приближенной, если $\rho(x)$ непрерывна по крайней мере, для малого участка стержня $[x_i, x_{i+1}]$. Таким образом,

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i) \Delta x_i,$$

где ξ_i — любая точка на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. В пределе при $\lambda \rightarrow 0$, где $\lambda = \max \Delta x_i$, получаем точную формулу:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

В приведенных рассуждениях мы стремились получить с помощью интегралов некоторые общие формулы, ориентированные на много-

кратное использование. Однако во многих случаях интегралы выступают просто как вычислительный аппарат, позволяющий решать те или иные частные задачи, не претендующие на получение подобных формул. Рассмотрим простой пример.

Стена шлюза, испытывающая давление воды, имеет форму прямоугольника (рис. 149). Требуется вычислить это давление P .

Как известно, давление жидкости на горизонтальную пластинку площадью S , погруженную на глубину h ,

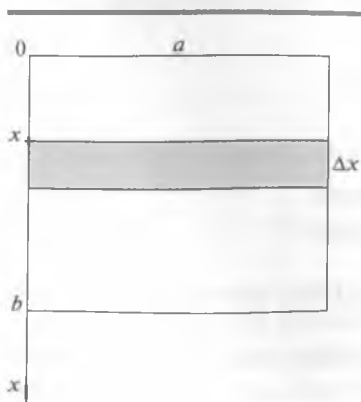


Рис. 149

равно весу столба жидкости, расположенной над пластинкой, т.е. равно ρhS , где ρ — плотность жидкости (для воды $\rho = 1$).

Возьмем полосу малой ширины Δx , погруженную на глубину x . Можно приближенно считать (ввиду малости Δx), что давление на нее равно величине $x a \Delta x$. Разбив весь прямоугольник на такие полосы, можно просуммировать давление, получим приближенное значение для искомой величины P :

$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} a x_i \Delta x_i.$$

В пределе при $\lambda \rightarrow 0$ получаем точное значение давления

$$P = a \int_0^b x dx = a \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^b = \frac{ab^2}{2}.$$

Но, пожалуй, самые многочисленные приложения определенных интегралов при решении прикладных задач возникают при моделировании процессов и некоторых функциональных соотношений так называемыми *дифференциальными уравнениями*. Сами дифференциальные уравнения всегда отражают в виде математических моделей некоторые реальные взаимосвязи и закономерности процессов. А решаются уравнения чаще всего с помощью интегралов. При этом качественный смысл интегралов обычно оказывается скрытым в ходе исследования. Но зато полученное с их помощью решение как раз и представляет собой основную ценность для содержательного истолкования результатов моделирования.

Краткое рассмотрение теории дифференциальных уравнений будет предложено в гл. 9.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Как известно, любое уравнение — это утверждение о равенстве двух функций (чисел, выражений, некоторых математических конструкций и т.д.). Такое утверждение может быть истинным или ложным для различных элементов из множества тех, для которых оно имеет смысл. Иногда такие элементы называют переменными, или неизвестными, в данном уравнении. Если утверждение оказывается истинным, то соответствующий элемент называется *решением* уравнения.

В данном подразделе речь пойдет об уравнениях, в которых в роли переменных (неизвестных) оказываются функции, причем в записи уравнения (т.е. в формулировке утверждения) эта функция находится *под знаком производной*. Такие уравнения называют *дифференциальными*.

Например, равенство $y' + y = x + 2$ является дифференциальным уравнением с неизвестной функцией $y = y(x)$. Ясно, что функция $y = x + 1$ будет его решением, поскольку при подстановке ее в уравнение возникает истинное равенство для всех x , т.е. тождество по переменной x : $x + 2 \equiv x + 2$.

Однако у данного уравнения есть и другие решения, даже целое семейство решений, зависящее от произвольного параметра C : $y = Ce^{-x} + x + 1$ (здесь C — произвольная постоянная, на что указывают записью $C = \text{const}$).

В этом легко убедиться, подставляя произвольную функцию из этого семейства в уравнение. Вновь возникает тождественное по переменной x равенство, поскольку $y' = -Ce^{-x} + 1$. Оказывается, что других решений у данного уравнения нет.

Когда ставят задачу решить уравнение, обычно имеют в виду, что требуется найти все решения уравнения или доказать, что их нет.

В записи дифференциального уравнения, конечно, могут участвовать производные любого порядка. Поэтому вводят понятие *порядка* уравнения, понимая под ним порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Наиболее общий вид уравнения первого порядка: $F(x, y, y') = 0$. Обычно стремятся привести запись такого уравнения к несколько более простому виду: $y' = f(x, y)$.

Еще один вариант записи возникает, если истолковать производную как отношение дифференциалов $y' = \frac{dy}{dx}$ (см. подразд. 7.3). Тогда возникает общая запись уравнения первого порядка в дифференциалах: $dy = f(x, y)dx$ или, в еще более общей форме, $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Общий вид уравнения второго порядка: $F(x, y, y', y'') = 0$ или $y'' = f(x, y, y')$. Например, $y'' + y' = 0$.

Если неизвестная функция в дифференциальном уравнении зависит от одной переменной ($y = y(x)$), то уравнение называют *обыкновенным*. Если она зависит от нескольких переменных, то производные оказываются частными, поэтому и соответствующее уравнение называют уравнением *в частных производных*. Далее рассматриваются лишь обыкновенные дифференциальные уравнения.

Одно из самых замечательных прикладных свойств дифференциальных уравнений заключается в том, что с их помощью можно описывать (моделировать, изучать) процессы. В самом деле, вспомним истолкование производной как скорости изменения функции, а второй производной — как ускорения. Если эта функция связана с законом движения $S = S(t)$, где t — время, а S — путь, пройденный точкой, то речь идет о скорости механического движения. Но и при любом другом содержательном истолковании функции $y = y(x)$ ее производная y' также получает содержательное истолкование, связанное с процессом изменения y при изменении аргумента. Поэтому дифференциальными уравнениями могут моделироваться химические реакции, рост растений, изменение численности бактерий и популяций животных, перетекание теплоты, энергии, возникновение траекторий движения тел и т.д.

Например, известный второй закон Ньютона $F = ma$ фактически представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, поскольку $a = \frac{d^2S}{dt^2}$, а сила F , под действием которой точка движется

вдоль прямой, в общем случае может зависеть не только от времени t , но и от уже пройденного пути и скорости в каждый данный момент времени: $F = F\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right)$.

Если в частном случае оказалось, что $F = \text{const}$, то уравнение приобретает простейший вид $\frac{d^2 S}{dt^2} = C_0$ и характеризует равномерное движение (с постоянным ускорением). У последнего уравнения очень простое решение. Его можно получить сразу в общем виде, вычислив вначале интегралы от обеих частей данного равенства:

$$\frac{dS}{dt} = C_0 t + C_1$$

(здесь C_1 — произвольная постоянная), а затем еще раз — интегралы от обеих частей полученного равенства:

$$S = \frac{C_0}{2} t^2 + C_1 t + C_2$$

(здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные). Обратим внимание, что для уравнения второго порядка мы нашли семейство решений, зависящих уже от двух параметров.

Для приведенного ранее примера дифференциального уравнения первого порядка параметр в семействе решений был только один. Оказывается, что это не случайно, и можно доказать, что число произвольных параметров в семействе решений совпадает с порядком уравнения (если оно, образно говоря, достаточно «хорошее»).

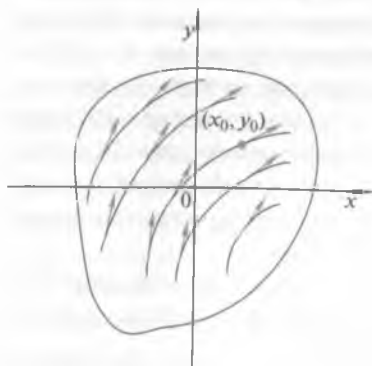


Рис. 150

Ясно, что и другие варианты истолкования производной, например как углового коэффициента касательной, дают полезные трактовки дифференциального уравнения. Рассмотрим, например, уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ определена и непрерывна в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) . Тогда в каждой точке этой окрестности известно, под каким углом должна быть наклонена касательная к графику любого решения $y = y(x)$. Это направление определяется значением

функции $f(x, y)$. Другими словами, указанная окрестность преобразуется в поле направлений, а любое решение уравнения — это кривая (в этом случае ее часто называют *интегральной*), которая в каждой точке имеет направление, совпадающее с полем направлений (рис. 150).

При таком истолковании становится совершенно ясным, почему у дифференциальных уравнений может быть целое семейство решений.

При желании можно добавить некоторые условия с тем, чтобы обеспечить *единственность решения*. Для уравнения $y' = f(x, y)$ достаточно просто указать фиксированную точку, через которую должна проходить интегральная кривая, т.е. потребовать, чтобы решение уравнения $y = y(x)$ удовлетворяло условию: при $x = x_0, y = y_0$.

Такого рода условия называются *начальными*, или условиями Коши, а задача поиска решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, — *задачей Коши*.

Приведенные рассуждения показывают, что целесообразно различать следующее:

- *общее решение* дифференциального уравнения, под которым понимается семейство решений, зависящих от произвольной постоянной C , за счет выбора значений которой можно удовлетворить начальным условиям, т.е. решить задачу Коши;
- при любом фиксированном значении постоянной C из общего решения возникает *частное решение*;
- иногда существуют и так называемые *особые решения*, которые не могут быть получены из общего ни при каком значении постоянной C .

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$(y - x)(y' + y) = 0.$$

У него есть общее решение $y = Ce^{-x}$ (обращающее в тождественный нуль выражение во второй скобке в записи уравнения). Если задано, например, начальное условие: при $x = 0, y = 0$, то возникает частное решение (т.е. решение данной задачи Коши) $y = 0$ (при $C = 0$).

Однако уравнение имеет и особое решение $y = x$, оно, очевидно, не может быть получено из общего, поскольку тождественное равенство $Ce^{-x} \equiv x$ невозможно.

В самом деле, здесь нельзя взять $C = 0$, но равенство невозможно и если $C \neq 0$; достаточно заметить, что указанные функции по-разному ведут себя при $x \rightarrow \infty$.

9.2. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обратимся к рассмотрению уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$. Первый принципиально важный вопрос — существуют ли у него решения и можно ли решить задачу Коши?

Справедлива следующая теорема (существования и единственности решения дифференциального уравнения).

Т е о р е м а. Если для уравнения $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в окрестности точки (x_0, y_0) и производная этой функции по переменной y тоже непрерывна, то исходное уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, определенное в окрестности точки x_0 и удовлетворяющее условию: при $x = x_0$ выполняется $y = y_0$.

Доказательство этой теоремы оказывается довольно сложным, мы его не рассматриваем.

Важность сформулированного утверждения не только теоретическая. Дело в том, что лишь в редких случаях удается получить точное решение даже для уравнения первого порядка. А необходимость их решения в прикладных задачах очень велика. Поэтому прибегают к приближенным методам решения, для которых разработаны весьма эффективные алгоритмы. Однако применение этих алгоритмов корректно лишь в том случае, когда заранее известно, что искомое решение существует и единственно.

Понятно, что вполне возможны случаи, когда ограничения, обозначенные в данной теореме для функции $f(x, y)$, могут быть нарушены. В этом случае нельзя гарантировать существование и (или) единственность решения.

Это видно уже на простейших примерах. Рассмотрим уравнение $y' = \frac{2y}{x}$. При $x = 0$ функция $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ имеет разрыв. И это существенно сказывается на решениях дифференциального уравнения, связанных с начальными условиями, для которых $x_0 = 0$.

Легко проверить (подстановкой в уравнение), что общее решение имеет вид $y = Cx^2$, где C — произ-

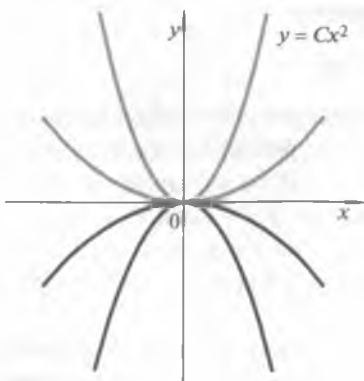


Рис. 151

вольная постоянная. Это семейство парабол, изображенных на рис. 151. Через все точки плоскости, кроме $(0, 0)$, проходит единственная интегральная кривая: условия теоремы выполнены. Однако очевидно, что через точку $(0, 0)$ проходит бесконечно много интегральных кривых — свойство единственности нарушено. Такого рода точки называются *особыми* (по аналогии с особыми решениями, о которых шла речь ранее).

Довольно немногочисленны случаи, когда удается выразить решение уравнения $y' = f(x, y)$ в виде функции $y = y(x)$ или хотя бы в неявном виде, как решение уравнения $\Phi(x, y) = 0$, или, скажем, представить через интегралы (даже не вычисляющиеся в элементарных функциях). Все такие решения считаются точными. Но они, конечно, представляют особый интерес, поскольку дают возможность более полно исследовать моделируемый процесс или явление по сравнению с его приближенным описанием, заданным, например, в виде какой-то числовой таблицы. Эти случаи детально анализируются в теории дифференциальных уравнений, которая является большим самостоятельным разделом современной математики. Здесь ограничимся рассмотрением лишь двух, наиболее простых классов таких уравнений.

Первый из них — *уравнения с разделяющимися переменными*. Каждое из них можно преобразовать к виду

$$P(x)dx = Q(y)dy,$$

который характерен тем, что в одной части равенства стоит выражение, зависящее только от x , а в другой — только от y . Если от обеих частей равенства вычислить неопределенные интегралы, то они могут отличаться друг от друга только постоянным слагаемым (это достаточно очевидное утверждение можно доказать совершенно строго). Поэтому

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy$$

(здесь произвольное слагаемое C можно считать скрытым в неопределенных интегралах). Согласно предыдущему, такое равенство уже задает общее решение. Если интегралы удастся вычислить, то искомого решения $y = y(x, C)$ получается в неявном виде

$$P_1(x) = Q_1(y) + C,$$

где $P_1(x) = \int P(x)dx$ и $Q_1(y) = \int Q(y)dy$.

Из последнего равенства обычно пытаются выразить y через x и C .

К уравнениям с разделяющимися переменными относится, в частности, уравнение вида $y' = f(x)$. Его решение предельно простое: $dy = f(x)dx$ и $y = \int f(x)dx$.

Аналогично уравнение $y' = f(y)$ преобразуется к виду $\frac{dy}{f(y)} = dx$, и находят $x = \int \frac{dy}{f(y)}$. При этом важно проверить, что $f(y) \neq 0$. Если же $f(y) = 0$, то, находя решения этого уравнения, рассматривают их дополнительно: часто они могут оказаться особыми.

Например, в самом общем случае уравнение

$$P_1(x)Q_1(y)dx = P_2(x)Q_2(y)dy$$

сводится к уравнению, в котором переменные разделены после деления обеих частей равенства на $P_2(x)Q_1(y)$. При этом равенство $P_2(x) = 0$ может задавать особые точки, а $Q_1(y) = 0$ — особые решения.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть вначале $y' = \frac{2y}{x}$. Решение этого уравнения было приведено ранее в готовом виде. Имеем $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$ ($y \neq 0, x \neq 0$). Или $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$ (произвольную постоянную здесь удобно взять в виде логарифма, $C > 0$). Поэтому

$$|y| = C|x^2|,$$

т.е. $y = Cx^2$ и $y = -Cx^2$. Последние два множества решений можно объединить одной формулой $y = Cx^2$, если считать теперь, что произвольная постоянная C может иметь любой знак.

Обратимся теперь к анализу введенных ограничений. Об особой точке, связанной с $x = 0$, мы уже говорили. Рассмотрим $y = 0$. Это решение исходного уравнения, в чем легко убедиться, подставляя его в уравнение. Однако оно содержится в семействе $y = Cx^2$ (при $C = 0$), т.е. оно оказалось частным (а не особым).

Пример 2. Рассмотрим процесс распада радиоактивного вещества, считая, что скорость распада пропорциональна наличному количеству $m(t)$ этого вещества в каждый момент времени t .

Имеем $\frac{dm}{dt} = -km$, где $k > 0$, так как с течением времени скорость распада убывает. Пусть в момент времени $t = 0$ масса вещества была m_0 (это начальные условия процесса).

Ясно, что данное уравнение относится к уравнениям с разделяющимися переменными. Поэтому

$$\frac{dm}{m} = -k dt \text{ и } \int \frac{dm}{m} = -k \int dt, \ln|m| = -kt + \ln C, \\ m = Ce^{-kt}.$$

Воспользуемся начальными условиями: полагаем $t = 0$ и $m = m_0$. Тогда $C = m_0$ и закон радиоактивного распада предстает в виде

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от природы вещества.

Заметим, что при решении задачи Коши (при $x = x_0, y = y_0$) удобнее пользоваться определенными интегралами и сразу записывать искомое решение в виде

$$\int_{x_0}^x P(x) dx = \int_{y_0}^y Q(y) dy.$$

Нетрудно проверить, что для него начальные условия будут заведомо выполняться, так как, подставляя $x = x_0$ и $y = y_0$, получаем верное равенство: $0 = 0$, т. е.

$$\int_{x_0}^x P(x) dx = \int_{y_0}^y Q(y) dy = 0.$$

Для примера 2 это сразу давало бы искомое решение:

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -k \int_0^t dt;$$

$$\ln|m| - \ln|m_0| = -kt;$$

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

*↓ Другой класс уравнений первого порядка, решение которых всегда можно выразить через интегралы, — это *линейные уравнения*.

Их вид —

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

а название объясняется тем, что неизвестная функция и ее производная входят в запись уравнения как линейная конструкция. Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Однородное уравнение легко решается, так как переменные в нем разделяются.

Один из способов решения линейных уравнений заключается в том, что их решения разыскиваются в виде произведения двух функций $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тогда одну из них, например v , можно выбрать произвольно, позаботившись лишь о том, чтобы $v = v(x) \neq 0$. Такой подход позволяет упростить вычисления: $y' = u'v + uv'$, поэтому $u'v + u(v' + Pv) = Q$ и ради упрощения вычислений можно взять в качестве $u(x)$ любое решение уравнения $v' + P(x)v = 0$. У последнего уравнения переменные разделяются: $\frac{dv}{v} = -P(x)dx$; $\ln|v| = -\int P(x)dx$, т.е. $v = e^{-\int P(x)dx}$. Но тогда исходное уравнение, из которого предстоит найти $u(x)$, существенно упрощается:

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}, \text{ т.е. } u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx.$$

Найдены обе функции $u(x)$ и $v(x)$, т.е. и решение линейного уравнения.

Пример 3. Пусть требуется найти общее решение уравнения $y' + 2xy = 2x$. Полагая $y = u \cdot v$ и поэтому $y' = u'v + uv'$, перепишем уравнение в виде

$$u'v + u(v' + 2xv) = 2x.$$

Выберем $v(x)$ так, чтобы $v' + 2xv = 0$. Тогда $\frac{dv}{v} = -2x dx$ и $v = e^{-x^2}$.

Подставляем $v(x)$ в исходное уравнение. В результате оно приобретает вид $u' \cdot e^{-x^2} = 2x$, т.е. $\frac{du}{dx} = 2xe^{x^2}$ и $u(x) = \int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + C$, где C — произвольная постоянная.

Итак, общее решение исходного уравнения $y = Ce^{-x^2} + 1$.

Пример 4. Найти линию, касательная к которой в каждой точке (x_0, y_0) делит пополам отрезок прямой $y = a$ для $0 \leq x \leq x_0$ (рис. 152).

Уравнение касательной к линии $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

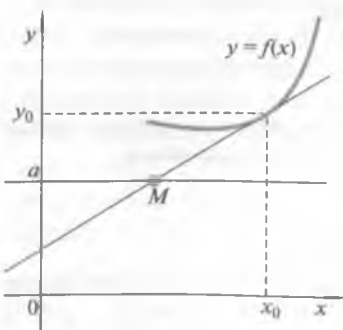


Рис. 152

Поскольку такая касательная должна проходить через точку $M\left(\frac{x_0}{2}, a\right)$, то ее вид может быть уточнен:

$$a - y_0 = f'(x_0)\left(-\frac{x_0}{2}\right).$$

Это равенство должно быть верным для любой точки (x_0, y_0) , лежащей на кривой. Поэтому, объявляя точку переменной и обозначая (для упрощения за-

писи) вновь как точку с координатами (x, y) , получаем из последней записи дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{2y}{x} = -\frac{2a}{x}.$$

Это линейное неоднородное уравнение. Решая его описанным выше способом, находим: $y = u \cdot v$; $u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = -\frac{2a}{x}$; $v' - \frac{2}{x}v = 0$; $\frac{v'}{v} = \frac{2}{x}$;

$$\int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}; \ln|v| = 2\ln|x|; v = x^2; \frac{du}{dx} = -\frac{2a}{x^3}; u = -2a \int \frac{dx}{x^3}; u = \frac{a}{x^2} + c;$$

$$y = a + Cx^2.$$

Таким образом, указанным свойством обладает любая парабола вида $y = Cx^2$, сдвинутая вдоль оси Oy на величину a ($C = \text{const}$). В частности, при $a = 0$ касательная к параболе $y = Cx^2$ делит отрезок $[0, x_0]$ оси Ox пополам. Этим свойством можно пользоваться практически, строя касательные к параболе в любой данной точке. ↑*

9.3. ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Будем рассматривать теперь дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$. Для него может быть доказана теорема существования и единственности решения, аналогичная той, что приведена ранее для уравнения первого порядка. Правда, условия, гарантирующие единственность решения такого уравнения, выглядят несколько сложнее. Например, так: при $x = x_0$ должны выполняться равенства $y = y_0$ и $y' = y_0'$ (здесь x_0, y_0, y_0' — заданные числа). Их также называют *начальными условиями* или условиями Коши.

Удовлетворить начальным условиям за счет выбора интегральной кривой среди их семейства (множества всех решений исходного дифференциального уравнения) удастся за счет фиксирования конкретных значений параметров C_1 и C_2 . Таким образом, *общее решение* дифференциального уравнения второго порядка является семейством функций $y = y(x, C_1, C_2)$, зависящим от двух параметров.

Найти точное решение уравнения второго порядка удастся лишь для немногих частных случаев. В теории и практике решения дифференциальных уравнений считается достижением даже *понижение порядка* уравнения, т.е. сведение задачи поиска решения исходного уравнения к проблеме нахождения решений некоторого уравнения

первого порядка. Это тоже удастся сделать лишь для конкретных классов уравнений второго порядка.

Например, если исходное уравнение имеет вид $y'' = f(x, y')$ (т. е. не содержит в своей записи в явном виде переменной y), то понижение порядка возможно: обозначим $z = y' = \frac{dy}{dx}$, тогда $z' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz}{dx}$ и уравнение переписется в виде $z' = f(x, z)$.

Возможно понизить порядок и уравнения вида $y'' = f(y, y')$ (в явном виде в его записи нет независимой переменной x). Тогда поступают так: временно объявляют y новой независимой переменной и делают замену $z = \frac{dy}{dx}$. Тогда y'' можно переписать в виде

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy} \quad (\text{мы воспользовались здесь правилом дифференцирования сложной функции, считая, что } z = z(y) \text{ и } y = y(x)).$$

Поэтому исходное уравнение переписется в виде $z \frac{dz}{dy} = f(y, z)$, т. е. превратится в уравнение первого порядка.

Конечно, случаи, когда удастся получить точное решение уравнения второго порядка, представляет особый интерес.

Самый простой из них: $y'' = f(x)$.

Интегрируя обе части такого уравнения по переменной x , находим $y' = \int y'' dx$, и поэтому $y' = \int f(x) dx + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная.

Теперь можно проинтегрировать еще раз:

$$y = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

(специально записали постоянные C_1 и C_2 в явном виде, желая показать, как в этом случае возникает семейство решений, зависящих от двух параметров).

Например, для уравнения $y'' = e^{2x}$ имеем

$$y' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1.$$

Далее, $y = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx + C_1 \int dx + C_2$, т. е. общее решение записывается.

$$y = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \quad (C_1 = \text{const}, C_2 = \text{const}).$$

Еще один класс уравнений, которые решаются даже без процедур интегрирования — *линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*.
Их вид —

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

где a_1 и a_2 — постоянные числа.

Непосредственно из записи такого уравнения видно, что если каким-либо способом удалось найти два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то комбинация

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

тоже будет решением. Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В этой записи решения содержатся две произвольные постоянные — столько, сколько и должно быть в общем решении дифференциального уравнения второго порядка. Возникает мысль: не будет ли это общее решение?

Оказывается, будет при условии, что $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ не является тождественной постоянной (этот факт приводим без доказательства).

Таким образом, проблема поиска общего решения указанного уравнения сводится к поиску всего двух функций, обращающих уравнение в тождество. Более того, существует простой алгоритм для их поиска. Для этого надо составить по исходному дифференциальному уравнению так называемое *характеристическое уравнение*, заменив формально y'' , y' и y , соответственно, на k^2 , k , $k^0 = 1$, где k — пока неизвестное число:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение является обычным квадратным (алгебраическим) уравнением. Для него возможны следующие случаи:

1. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения *действительные и различные* ($k_1 \neq k_2$).

Тогда непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что две функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ будут решениями, и, следовательно, общее решение будет иметь вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Например, $y'' - y' - 2y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 = 0$, а его корни $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, и поэтому общее решение $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения **действительные, но равные**: $k_1 = k_2$. Тогда можно показать, что общее решение соответствующего дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

Например, для уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ корни характеристического уравнения $k_1 = k_2 = 1$, поэтому его общее решение $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

3. Корни характеристического уравнения **комплексные**, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тогда можно показать, что общее решение дифференциального уравнения предстает в виде

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Например, для уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$ имеем $k^2 + \omega^2 = 0$, $k_{1,2} = \pm i\omega$, поэтому $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$.

Заметим, что указанное дифференциальное уравнение представляет прикладной интерес, поскольку описывает так называемые **гармонические колебания**.

Предположим, что груз массой m подвешен на пружине и находится в среде, сопротивлением которой мы пренебрегаем. Если его вывести из положения равновесия и отпустить, возникают свободные колебания. Они определяются равновесием упругой силы пружины F_n и силой инерции F_n (рис. 153).

При этом F_n подчиняется закону Гука, по которому ее величина пропорциональна отклонению y тела от положения равновесия $F = -ky$. Здесь $k > 0$, поскольку сила F_n направлена в сторону, противоположную отклонению от положения равновесия. Сила инерции определяется вторым законом Ньютона $F_n = my''$. Здесь $y = y(t)$, где t — время.

Таким образом, должно выполняться равенство $my'' = -ky$, т. е. возникает дифференциальное уравнение

$$y'' + \omega^2 y = 0, \text{ где } \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Решение этого уравнения мы уже получили. Перепишем его в несколько другом виде:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = \\ &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega t \right) = \\ &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} (\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t). \end{aligned}$$

Мы обозначили $\sin \alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$.

Тогда $\cos \alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, поскольку $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Наконец, используя тригонометрическую формулу

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

получим окончательно $y = A \sin(\omega t + \alpha)$.

Здесь $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

Это и есть формула гармонических колебаний, описывающая свободные незатухающие колебания с постоянной амплитудой A , частотой ω и начальной фазой α . Конкретный вид графика указанных функций для разных A , ω и α может быть построен методами преобразования графиков, о которых шла речь в подразд. 5.1.3.

Заметим, что и в более сложном случае — для неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

где a_1 и a_2 — постоянные, описанные выше вычисления, связанные с характеристическим уравнением, оказываются полезными, поскольку их общее решение представимо в виде

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_3(x),$$

где $C_1 y_1 + C_2 y_2$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, а y_3 — любое частное решение исходного уравнения. На практике $y_3(x)$ нередко удается просто подобрать, учитывая вид $f(x)$. Например, если $f(x)$ — многочлен, то всегда существует $y_3(x)$ в виде многочлена. Вначале его можно записать для $y_3(x)$ с неопределенными коэффициентами, а затем вычислить эти неопределенные коэффициенты, исходя из того, что подстановка $y_3(x)$ в уравнение должна давать тождественное равенство.

Например, для уравнения $y'' - 2y' + y = x$ можно попытаться найти $y_3(x)$ в виде $y_3(x) = ax + b$, где a и b — пока неизвестные. Имеем $y_3'(x) = a$, $y_3''(x) = 0$, поэтому после подстановки в уравнение должно выполняться тождество

$$-2a + (ax + b) = x.$$

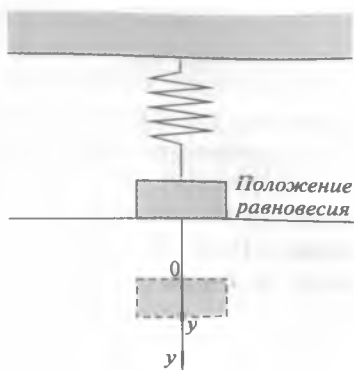


Рис. 153

В нем можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x , т.е. $ax = x$, и поэтому $a = 1$, и $-2a + b = 0$, т.е. $b = 2$.

Итак, $y_3(x) = x + 2$, и поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x + 2$.

Предположим, что дополнительно заданы начальные условия: при $x = 0$ верно $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. В этом случае потребуется определить значение постоянных C_1 и C_2 так, чтобы начальные условия выполнялись. Подставляя $x = 0$ в общее решение, а также в его производную, получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + 2 = 1; \\ C_1 + C_2 + 1 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $C_1 = -1$ и $C_2 = 0$. Итак, решение соответствующей задачи Коши для данного уравнения задается функцией

$$y = -e^x + x + 2.$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

10.1. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Важнейшим понятием, которое использовалось в описанных выше разделах математики, оказалось понятие функции. Обратим внимание, что речь всегда шла об *однозначной* функции, сопоставляющей каждому набору значений своих аргументов единственное значение функции. Однако человек живет в мире неопределенностей и неожиданности: точно неизвестно, придет ли вовремя ожидаемый транспорт, получится ли небракованная деталь при изготовлении ее рабочим, найдется ли нужный товар в магазине и т.д. В данном случае неважно, возникает ли подобная неопределенность просто от незнания истинной, как правило, весьма сложной, но тем не менее однозначной взаимосвязи переменных или причина ее органически присуща окружающему миру. Вопрос в другом — можно ли найти какие-то *закономерности в случайных явлениях*, а затем и использовать их для достижения тех или иных целей жизнедеятельности?

Рассмотрением таких вопросов занимается математическая дисциплина, называемая *теорией вероятностей*, а многие ее практические приложения используются в так называемой *математической статистике*. Центральным понятием теории вероятностей оказывается однозначная числовая функция, определенная на множестве случайных событий и называемая *вероятностью* события. Таким образом, и здесь понятие однозначной функции оказывается основным инструментом описания закономерностей.

На ранних этапах формирования теории вероятностей использовалось так называемое классическое определение вероятности, не вполне корректное с современных математических позиций. Оно связывалось с наблюдениями результатов многократно воспроизводимого опыта по отношению к определенному случайному собы-

тию A . Мы имеем возможность рассмотреть понятие «вероятность» в современной трактовке, раскрывающей его истинную математическую природу.

10.1.1. Аксиоматическое определение вероятности

Рассмотрим произвольное множество Ω в качестве первичного. Оно может быть конечным или бесконечным. Для простоты записи будем вначале считать его конечным: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Здесь $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ — все элементы данного множества.

Имея в виду основную сферу дальнейших приложений, будем называть Ω *пространством элементарных событий*, а его элементы — *элементарными событиями*. Ясно, что эти названия не имеют отношения к математической сущности проводимых построений. Рассмотрим теперь множество всех подмножеств множества Ω , которое мы в данном контексте обозначим $H(\Omega)$. Его элементы назовем (*случайными*) *событиями*. Событие Ω назовем *достоверным* (как известно, $\Omega \in H(\Omega)$); событие $\emptyset$ (пустое множество) — *невозможным* (как известно, $\emptyset \in H(\Omega)$). События A и B назовем *несовместными*, если $A \cap B = \emptyset$.

Пусть, например, мы бросаем игральный кубик. Тогда ω_i — это факт выпадения i очков на верхней грани ($i = 1, \dots, 6$); $\{\omega_1, \omega_2\}$ — событие, заключающееся в выпадении не более двух очков; $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ — выпадение нечетного числа очков и т.д.

В дальнейшем можно рассматривать не только $H(\Omega)$, а любое его подмножество $F(\Omega)$, обладающее тем свойством, что $\Omega \in F$, $\emptyset \in F$ и для любых $A \in F$ и $B \in F$ верно: $A \cap B \in F$, $A \cup B \in F$. Такое множество F называют *алгеброй событий*.

О п р е д е л е н и е. Числовую функцию P , определенную на алгебре событий F , называют *вероятностью*, если выполнены следующие аксиомы:

1. Для любого $A \in F$ верно $P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности).
2. $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности).
3. Если $A \in F$ и $B \in F$ несовместны (т.е. $A \cap B = \emptyset$), то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (аксиома аддитивности).

Из перечисленных аксиом, в частности, следует, что $P(\emptyset) = 0$ (действительно, $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, поэтому $P(\Omega \cap \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1$, но $P(\Omega) = 1$, значит, $P(\emptyset) = 0$). Таким образом, вероятность достоверного события равна единице, а невозможного — нулю.

10.1.2. Классическое определение вероятности

В качестве примера рассмотрим *классическое определение вероятности*.

Пусть производится некоторый опыт, результатом (исходом) которого могут быть *равновозможные* исходы $A_1, A_2, \dots, A_n$. Например, подбрасывается монета. Как показывают многочисленные наблюдения, выпадение «герба» и «решки» равновозможно, что проявляется, в частности, в том, что число выпадений того и другого типа оказывается приблизительно равным при большом числе опытов (испытаний). Или пусть в урне находится одинаковое число скрытых от наблюдения белых, черных и красных шаров. Тогда одинаковы шансы вынуть, не глядя, шар заданного цвета. Для отдельно взятого шара возможность оказаться вынутым такая же, как и для любого другого шара.

Тем не менее понятие «равновозможность» не является математическим, и поэтому уже в его использовании оказывается заложенной некоторая некорректность дальнейших построений.

Припишем каждому равновозможному исходу опыта вероятность $\frac{1}{n}$.

Пусть теперь рассматривается некоторое событие A , наступлению которого благоприятствуют некоторые из элементарных исходов $A_1, A_2, \dots, A_n$ (а остальные не благоприятствуют). Если их число m , то положим по определению $P(A) = \frac{m}{n}$, т.е. назовем вероятностью данного события A отношение числа элементарных исходов, ему благоприятствующих, к числу всех таких исходов. Это и есть классическое определение вероятности.

Возьмем другое событие B , несовместное с событием A . Тогда очевидно, что $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. В самом деле, если наступлению события B благоприятствует m_1 исходов, то ни один из них не может благоприятствовать A (иначе при возникновении этого исхода одновременно наступали бы события A и B и, значит, они уже не были бы несовместны).

Поэтому сумме событий $A \cup B$ (т.е. наступлению хотя бы одного из них) благоприятствует ровно $m + m_1$ исходов, а равенство $\frac{m + m_1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{m_1}{n}$ как раз и означает выполнение аксиомы аддитивности.

Другие аксиомы тоже, очевидно, выполняются, и это означает, что классическое определение вероятности оказывается частным случаем реализации общего аксиоматического определения.

Требование равновозможности исходов, конечно, является весьма жестким ограничением и выполняется далеко не всегда. Поэтому в классической части теории вероятностей оказались исследованными специфические задачи, хорошей моделью которых могли служить всевозможные случайные выборы без каких-либо предпочтений выбираемого объекта среди других (шары из урны, карты из колоды, множества m элементов из их общего набора числом n , наблюдения результата какого-то опыта в предположении, что он может быть воспроизведен любое сколь угодно большое число раз, и т. д.).

В теории вероятностей всегда предполагается, что случайные события являются *массовыми* в том смысле, что условия, при которых данное событие A может наступить или не наступить, воспроизводимы без изменений (хотя бы в принципе) любое число раз. Поэтому событие A может описываться экспериментально полученной

характеристикой. Ее называют *частотой*: $W(A) = \frac{n_A}{n}$, где n_A — чис-

ло опытов, в которых событие A наступило, а n — общее число опытов.

Многочисленные наблюдения показывают, что массовые случайные события обладают важным свойством: статистической устойчивостью частот, суть которой в том, что при $n \rightarrow \infty$ величина W имеет предел. Этот предел естественно было бы назвать *вероятностью* события A : $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A)$. Например, реально осуществленные несколько тысяч раз опыты с бросанием монеты показали, что «герб»

выпадает с частотой, очень мало отличающейся от $\frac{1}{2}$. Однако ясно, что такой подход является лишь экспериментальным основанием для определения понятия вероятности случайного события A . Но, строго говоря, последнее равенство нельзя взять в качестве такого определения. Достаточно заметить, что понятие предела мы вводим лишь для функций, определенных на числовых множествах. Тем не менее даже в рамках классического определения вероятности удалось установить важные теоретические факты, носящие название *закона больших чисел*. Суть различных формулировок его в том, что при определенных ограничениях частота события A действительно отличается от его вероятности сколь угодно мало, если число опытов n достаточно велико.

Простейшие задачи теории вероятностей связаны с вычислением вероятности случайных событий на основе их взаимосвязи с элементарными событиями, а также друг с другом. Приведем простой пример.

Пусть игральный кубик бросается дважды, а событие A заключается в суммарном выпадении более четырех баллов. Всего возможных исходов опыта $6 \cdot 6 = 36$ (после выпадения любой из шести граней при первом бросании кубика, при втором бросании кубика может также выпасть любая грань). Несколько проще подсчитать число исходов, которые благоприятствуют противоположному событию $\bar{A}$ (в сумме выпало не более четырех баллов). Вот они: (1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (2, 2); их шесть. Значит, $P(\bar{A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad (A \cup \bar{A} \text{ — событие достоверное, поэтому}$$

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$). Таким образом, повторяя наш опыт многократно, можно ожидать, что событие A будет наступать в среднем пять раз из шести.

10.1.3. Случайные величины

Случайное событие может состоять, в частности, в появлении некоторого числа, значение которого не может быть однозначно определено условиями его возникновения. Такие события называют *случайными величинами*. В этой трактовке мы сохраняем классический подход к понятию случайного события. Однако требование корректности в построении математических теорий заставляет нас вновь обратиться к аксиоматическому подходу, сохранив классические модели в качестве наглядных образцов из сферы практических приложений.

Математически корректно определить *случайную величину* как числовую функцию, заданную на пространстве элементарных событий.

Предположим вначале, что пространство элементарных событий является конечным множеством. Соответствующую ему случайную величину называют *дискретной*: она может принимать лишь конечное число значений, каждому из которых может быть сопоставлена вероятность его появления в опыте (поскольку определена вероятность благоприятствующих ему элементарных событий). Поэтому дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	X_1	X_2	...	X_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Здесь буквой X обозначена случайная величина, $X_1, \dots, X_n$ — перечень всех ее возможных значений, а $P_1, \dots, P_n$ — соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют *законом распределения дискретной случайной величины*.

Простейший пример дискретной случайной величины нам уже встречался: количество очков, выпавших на грани игрального кубика. Здесь все вероятности $P_i = \frac{1}{6}$, и поэтому можно сказать, что эта случайная величина распределена *равномерно*.

Рассмотрим в качестве случайного события состав семьи, наблюдаемой в населении страны. Каждому такому составу можно сопоставить, например, число детей в семье. Возникает дискретная случайная величина, возможные значения которой — неотрицательные целые числа: 0, 1, 2 и т. д.

В опыте анализа реального состава семей можно назвать частоты каждого из возможных случаев, опираясь на которые можно построить и теоретическую модель закона распределения данной случайной величины. В этой модели найденные частоты будут использованы уже в качестве вероятностей возможных значений случайной величины.

Понятно, что подсчитанные таким способом вероятности являются теоретической абстракцией, в зависимости от объема наблюдений достаточно или недостаточно хорошо описывающей реальную действительность.

Кроме дискретных случайных величин могут встречаться и *непрерывные*. Их значения могут принимать (по крайней мере, теоретически) любые числовые значения из некоторого промежутка, например, отрезка или даже всей числовой прямой.

Примером может служить расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия при одних и тех же контролируемых условиях стрельбы (прицел, заряд и т. д.). Однако на это расстояние влияет и огромное число факторов, учесть которые полностью невозможно. и поэтому дальность полета приходится считать случайной.

Непрерывной случайной величиной часто можно считать результаты измерения каких-то параметров реальных систем, время протекания некоторых процессов, отклонения теоретических значений величин от их значений, полученных в опыте, и т. д.

Проблема описания вероятностных закономерностей распределения непрерывных случайных величин оказывается несколько более сложной, чем для дискретных. В самом деле, вероятность того, что случайная величина X примет конкретное значение x_0 из промежутка $P(X = x_0)$ обычно должна быть объявлена нулевой (бесконечно малой), поскольку числовых значений на промежутке бесконечно много, а суммарная вероятность (попасть в промежуток значений) не превосходит 1. Возникает интересная ситуация: событие $X = x_0$ является возможным, но вероятность равна нулю. Нельзя и перечислить все возможные значения непрерывной случайной величины.

Поэтому для описания закона распределения непрерывной случайной величины пользуются следующей конструкцией. Пусть x — произвольная фиксированная точка на числовой оси. Тогда можно рассмотреть случайное событие $X < x$, т. е. событие, заключающееся в том, что случайная величина приняла значение меньше чем x . Пусть $P(X < x)$ — вероятность этого события. Если теперь менять x , то возникает функция, которая называется *функцией (законом) распределения* непрерывной случайной величины.

Обычно предполагают, что эта функция непрерывна и имеет непрерывную производную всюду, исключая, возможно, конечное число точек на прямой.

Легко видеть, что $0 \leq F(x) \leq 1$ (в таких границах находится вероятность) и, следовательно, график этой функции расположен в полосе между прямыми $y = 0$ и $y = 1$.

Далее $F(x)$ — неубывающая функция, т. е. при $x_2 > x_1$ верно $F(x_2) \geq F(x_1)$. Это ясно из определения: если интервал, в котором может оказаться случайная величина, расширить (вправо), то шансы попасть в него могут только возрасти.

Укажем характерный вид графика $F(x)$ в разных случаях.

На рис. 154 показан случай, когда величина может принимать значения на всей числовой прямой.

Если непрерывная случайная величина может принимать значения только на отрезке $[a, b]$, причем равномерно распределена на нем, то график функции распределения имеет вид ломаной, показанной на рис. 155. Равномерность распределения заключается в том, что любому отрезку Δx фиксированной длины, вне зависимо-

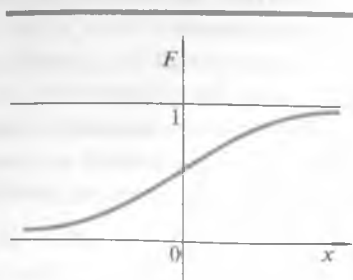


Рис. 154

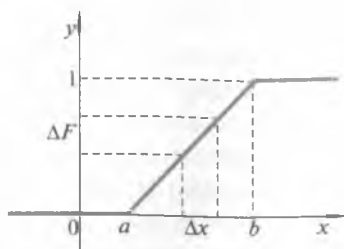


Рис. 155

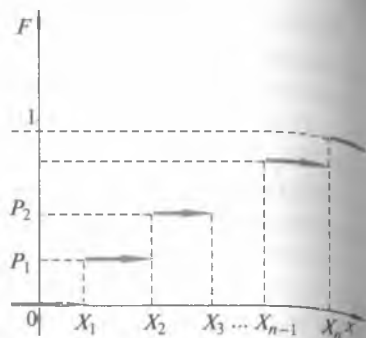


Рис. 156

сти от его расположения на отрезке $[a, b]$, соответствует одно и то же приращение вероятности ΔF .

Вернемся вновь к дискретным случайным величинам. Для них также может быть построена функция распределения $F(x)$, только график ее окажется ступенчатым (рис. 156).

В отличие от произвольных случайных событий случайные величины имеют существенные преимущества в отношении возможностей использования математического аппарата их анализа. В самом деле, для них в принципе можно использовать графики в декартовой системе координат, переходить к пределу, дифференцировать, интегрировать и т. д.

Поэтому разделы теории вероятностей и математической статистики, связанные с непрерывными случайными величинами, оказываются наиболее глубоко разработанными и практически полезными в приложениях.

В частности, и закон распределения непрерывной случайной величины иногда удобнее представлять не в виде функции $F(x)$, а в виде ее производной $f(x) = F'(x)$, функцию $f(x)$ называют *плотностью распределения*.

Характерный вид графика плотности распределения для функции $F(x)$ показан на рис. 157.

Если интересоваться, например, вероятностью попадания на отрезок $[a, b]$ случайной величины, распределенной по закону $F(x)$, то ее легко подсчитать по величине $f(x)$:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

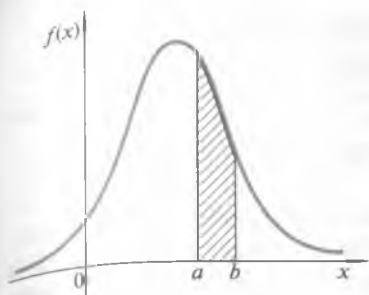


Рис. 157

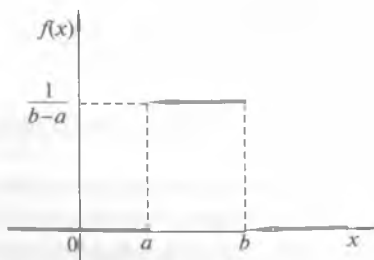


Рис. 158

Действительно, по определению $F(x) = P(X < x)$, и поэтому $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$. Однако по формуле Ньютона — Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Геометрически искомая вероятность равна площади криволинейной трапеции, заданной графиком функции $y = f(x)$ на $[a, b]$. Если представить себе, что $b \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow -\infty$, то в пределе эта вероятность будет равна 1.

Иногда этот факт записывают в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Такого вида интегралы мы не рассматривали (в наших построениях интеграла отрезок $[a, b]$ всегда был конечным). Однако их тоже вводят в математике с помощью указанного предельного перехода и называют *несобственными*.

Ясно, что если значения случайной величины не выходят за пределы конечного промежутка, обращение к несобственным интегралам не требуется.

Для случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ (рис. 158), для плотности распределения, очевидно, имеем

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

10.2. ПРОСТЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЕРОЯТНОСТЯХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

10.2.1. Формулы комбинаторики

Классическое определение вероятности позволяет решать практические задачи, связанные со случайными результатами опытов и испытаний, у которых конечное число равновозможных исходов. Существует несколько типовых операций с конечными множествами, которые оказываются наиболее полезными при соответствующих вычислениях вероятностей. Науку о них называют *комбинаторикой*. Познакомимся с основными понятиями и формулами комбинаторики.

1. Пусть набирается совокупность (строка) из k элементов $(x_1, \dots, x_k)$, причем элемент x_1 можно выбрать n_1 способами, x_2 — n_2 способами (после выбора элемента x_1) и т.д. Тогда строку $(x_1, \dots, x_k)$ можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами. Эту формулу иногда называют *правилом произведения*.

Если, например, из студенческой группы в 20 человек нужно выбрать старосту и профорга, то это можно сделать $20 \cdot 19 = 380$ способами.

2. Пусть дано множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, состоящее из n элементов. Из этих элементов можно составить упорядоченные наборы $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ (т.е. объявлять какой-то элемент первым, какой-то — вторым и т.д.). Каждый из таких наборов, состоящий из k элементов ($k \leq n$), называют *размещением* из n элементов по k ; их число обозначается A_n^k .

Предположим, что повторение элементов в размещении не допускается. Тогда по правилу произведения $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (число размещений без повторений элементов). Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$. Ясно, что если допустить возможность повторения элементов, то число размещений окажется равным n^k .

Пусть, например, формируется первая последовательность студентов в 6 человек для сдачи экзамена в студенческой группе из 20 человек. Тогда число возможных ее вариантов

$$A_{20}^6 = \frac{20!}{14!} = 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 27907200.$$

3. Если, в частности, в размещениях $n = k$ (т.е. размещаются все элементы данного множества), то возникают *перестановки*; их число обозначают P_n . Ясно, что $P_n = n!$

Если, например, множество состоит из трех элементов $\{a, b, c\}$, то можно составить следующие перестановки: (a, b, c) ; (a, c, b) ; (b, a, c) ; (b, c, a) ; (c, a, b) ; (c, b, a) . Их число: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

4. В размещениях учитывается порядок элементов. Но в некоторых случаях этот порядок безразличен, а важен только состав элементов, вошедших в набор из k элементов, выбранных из множества в n элементов. Такие различные подмножества, составленные из k элементов из набора в n элементов, называют *сочетаниями*. Их число обозначают C_n^k .

$$\text{Понятно, что } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Вернемся для примера к задаче о выборе старосты и профорга в студенческой группе в 20 человек. Если выбирать только составы соответствующих пар, пока не распределяя должности, то это как раз и будут сочетания из 20 элементов по 2; $C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$. Каждая выбранная пара содержит две возможности распределения должностей. Поэтому $190 \cdot 2 = 380$ — число всех возможностей, вычисленное ранее.

10.2.2. Формулы сложения, умножения и полной вероятности

1. Если два случайных события A и B несовместны, то, как и предусмотрено аксиоматикой теории вероятностей, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Это *формула сложения вероятностей* (верная только для несовместных событий).

Пусть, например, в урне 3 белых шара, 2 синих и 1 красный. Подсчитаем вероятность вынуть цветной шар, если шар вынимается наудачу. События «вынуть шар определенного цвета» несовместны; их вероятности, соответственно (для белого, синего и красного), равны: $P_1 = \frac{3}{6}$, $P_2 = \frac{2}{6}$, $P_3 = \frac{1}{6}$. Поэтому искомая вероятность:

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Важный частный случай несовместных событий возникает, если рассматривать любое событие A и *противоположное* ему $\bar{A}$ (заклю-

чающееся в том, что событие A не наступает). Очевидно, что $A \cup \bar{A}$ — событие достоверное и, следовательно, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Предположим теперь, что события A и B могут не быть независимыми. Рассмотрим два несовместных события $A \cap \bar{B}$ и $A \cap B$. Поскольку событие A наступает, если произойдет одно из этих событий, имеем

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B),$$

т. е.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

Аналогично $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$ и, с другой стороны,

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B),$$

поскольку событие $A \cup B$ произойдет, если наступит одно из трех несовместных событий: $A \cap \bar{B}$; $\bar{A} \cap B$; $A \cap B$.

Из указанных формул находим

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Эта формула верна в случае как независимых, так и зависимых событий A и B .

Говорят, что события $B_1, \dots, B_n$ образуют *полную группу* событий, если они попарно несовместны (т. е. $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$), покрывают все пространство элементарных событий (т. е. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$) и $P(B_i) > 0$.

Например, если $A \neq \Omega$, то A и $\bar{A}$ составляют полную группу событий.

В предыдущем примере с шарами полную группу событий составят, например, события B_1 — «вынут белый шар»; B_2 — «вынут синий шар»; B_3 — «вынут красный шар»; или, другой вариант: B'_1 — «вынут белый шар», B'_2 — «вынут цветной шар».

Ясно, что для полной группы событий

$$\sum_{i=1}^n P(B_i) = P(B_1) + \dots + P(B_n) = 1.$$

2. Как мы знаем, *сумма* двух событий $A \cup B$ представляет собой событие, заключающееся в наступлении хотя бы одного из событий: A или B .

Аналогично *произведение* событий $A \cap B$ заключается в одновременном наступлении A и B .

Пусть вероятности этих событий, рассматриваемых независимо друг от друга при реализации испытаний: $P(A)$ и $P(B)$. Но события A и B могут быть взаимосвязаны между собой. Поэтому если известно, что при реализации испытаний событие A уже произошло, то вероятность наступления события B может отличаться от $P(B)$.

Вернемся к примеру с урной. Если вероятность вынуть шар красного цвета $\hat{P}_3 = \frac{1}{6}$, то в предположении, что событие «вынуть цветной шар» произошло, она увеличится до $\frac{1}{3}$, поскольку цветных шаров всего 3.

Поэтому вводится понятие *условной вероятности* $P_A(B)$, под которой понимается вероятность наступления события B в предположении, что событие A произошло.

События A и B называются *независимыми*, если $P_A(B) = P(B)$ (т.е. факт наступления события A никак не влияет на вероятность того, что событие B наступило).

В общем случае справедлива следующая теорема умножения вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

Действительно, если по классическому определению вероятности событию A благоприятствуют m случаев из n (т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$), а из этих m случаев только m_1 благоприятствуют событию B (т.е. $P_A(B) = \frac{m_1}{m}$), то всего m_1 случаев благоприятствуют одновременному наступлению событий A и B (т.е. $P(A \cap B) = \frac{m_1}{n}$).

Поэтому доказываемое равенство предстает как очевидное:

$$\frac{m_1}{n} = \frac{m}{n} \frac{m_1}{m}.$$

Заметим, что события A и B рассматривались как равноправные, поэтому $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$.

Для независимых событий A и B верно $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Примером использования теоремы умножения может служить задача вычисления вероятности наступления хотя бы одного из независимых событий A_1, A_2 . Пусть вероятность этих событий $P(A_1)$ и $P(A_2)$. Рассмотрим противоположное событие (ни одно из указанных событий не наступило): $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$. События $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ тоже незави-

симы, поэтому $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)$. Тогда вероятность того, что хотя бы одно событие наступит $P(A_1 \cup A_2)$, можно найти по формуле

$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2).$$

Аналогичная формула справедлива для любого числа независимых событий $A_1, \dots, A_n$.

Пусть, например, по цели стреляют два стрелка, вероятность попадания в цель которых $P_1 = 0,6$ и $P_2 = 0,7$. Какова вероятность того, что при однократном выстреле стрелков цель будет поражена?

Поскольку вероятности промаха стрелков $1 - 0,6 = 0,4$ и $1 - 0,7 = 0,3$, имеем $P = 1 - 0,4 \cdot 0,3 = 0,88$.

3. Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из событий $B_1, \dots, B_n$, образующих полную группу событий. Тогда

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Эту формулу называют *формулой полной вероятности*. Она легко доказывается: события $A \cap B_i$ ($i = 1, \dots, n$) несовместны по условию, и поскольку $B_1, \dots, B_n$ — полная группа событий,

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_n)$$

(по теореме сложения). Остается заметить, что $P(A \cap B_i) = P(B_i)P_{B_i}(A)$ ($i = 1, \dots, n$).

10.2.3. Формула Бернулли

Будем производить повторные испытания, в каждом из которых вероятность некоторого события A не изменяется и равна p . Вероятность того, что событие A в испытании не наступит, будет равна $q = 1 - p$.

Пусть произведено n опытов. Подсчитаем вероятность $P_n(k)$ того, что событие A осуществится ровно k раз (и, следовательно, не осуществится $(n - k)$ раз).

Например, если наблюдать появление числа 3 при четырех подбрасываниях игрального кубика, то появиться ровно два раза это число могло бы в следующих случаях: $(3, 3, -, -)$; $(3, -, 3, -)$; $(3, -, -, 3)$; $(-, 3, 3, -)$; $(-, 3, -, 3)$; $(-, -, 3, 3)$ — мы указали результаты благоприятствующих вариантов опытов; знаком «-» показано появление любой цифры, кроме 3. Заметим, что каждый из перечисленных благоприятных вариантов реализуется, когда вместо «-» находится любая из цифр, кроме 3. Таких случаев $5 \cdot 5 = 25$. Таким образом,

всего благоприятствующих вариантов $6 \cdot 25$. Число всех возможных исходов, как ясно из подразд. 10.2.1 (п. 2), равно 6^4 . Поэтому

$$P_4(2) = \frac{6 \cdot 25}{6^4} = \frac{25}{6^3}.$$

Приведенные вычисления вряд ли можно назвать рациональными, поскольку легко усмотреть, что результат можно было бы получить по формуле

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Она называется *формулой Бернулли*.

В самом деле, вероятность появления каждого данного благоприятного результата можно найти по формуле умножения вероятностей: события независимы, вероятность однократного наступления равна p , а наступления k раз — p^k ; аналогично вероятность ненаступления $(n - k)$ раз — q^{n-k} . А всего благоприятных результатов оказывается ровно столько, сколько сочетаний можно составить из n элементов по k .

Вычисления по этой формуле в примере с кубиком дают тот же результат: $P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{6^3}$.

Будем считать, что произведено n независимых испытаний. Тогда число появления события A будет дискретной случайной величиной, распределенной по закону:

X	0	1	2	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^n p^n q^0$

Здесь, очевидно, $C_n^0 p^0 q^n = \frac{n!}{0!n!} p^0 q^n = q^n$ (так как $0! = 1$), $C_n^1 p^1 q^{n-1} = npq^{n-1}$, $C_n^n p^n q^0 = p^n$. Такое распределение случайной величины называется *биномиальным*. Пусть, например, монету бросают два раза. Тогда закон распределения числа появлений герба будет таким:

X	1	2	0
P	0,25	0,5	0,25

Здесь вероятность выпадения герба при однократном бросании монеты $p = \frac{1}{2}$, вероятность противоположного события — $q = \frac{1}{2}$.

Пользуясь формулой Бернулли, можно решать и много других задач, связанных с повторными испытаниями в ситуациях, когда рассматриваются всего два возможных исхода: событие A наступило и событие A не наступило.

Например, вероятность того, что событие A наступит менее k раз:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1),$$

аналогично — более k раз:

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n).$$

Заметим, что при больших n и k вычисления по формуле Бернулли становятся довольно громоздкими. В таких случаях иногда используются специальными приближенными формулами.

10.3. ПРОСТЕЙШИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

10.3.1. Математическое ожидание случайной величины

Мы видели, что случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.

Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть, например, X — дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тогда ее математическое ожидание $M(X)$ определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.

Предположим, что производится большое число испытаний и подсчитывается частота m_i появления значений x_i ($i = 1, \dots, n$). Тогда по закону больших чисел частоты их будут мало отличаться от соответствующих вероятностей p_i (в пределе — сколь угодно мало), и поэтому

$$M(X) \approx x_1 m_1 + \dots + x_n m_n = \sum_{i=1}^n x_i m_i.$$

Последняя сумма определяет среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины.

Таким образом, математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины (при большом числе испытаний).

Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, $p_i = \frac{1}{6}$. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно $M(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$. Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Указанная связь математического ожидания со средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины объясняет и лингвистический смысл термина «математическое ожидание».

Можно показать, что математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

А если случайные величины X и Y независимы (т.е. закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения принимает другая величина), то

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

↓Эти утверждения легко доказываются применением формул сложения и умножения вероятностей (см. подразд. 10.2.2), поэтому читателю рекомендуется проделать это самостоятельно.↑

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна, то математическое ожидание $M(X)$ числа наступления события A в n испытаниях равно $nM(X)$. Например, если $p = 0,5$ — вероятность попадания в цель при выстреле из орудия, то при 10 выстрелах математическое ожидание числа попаданий в цель будет равно $10 \cdot 0,5 = 5$.

Ясно, что здесь речь идет о биномиальном законе распределения, поэтому можно утверждать, что для случайной величины X , распределенной по биномиальному закону, $M(X) = np$, где p — вероятность наступления события A при одном испытании, а n — число испытаний.

Пусть теперь X — непрерывная случайная величина, значения которой не выходят за пределы отрезка $[a, b]$. Тогда по определению ее математическое ожидание выражается формулой

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx,$$

где $f(x)$ — плотность распределения.

В частности, для равномерного распределения (см. подразд. 10.1.3) имеем

$$M(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{1}{2}(a+b).$$

Если возможно появление любых числовых значений этой величины, то соответствующий интеграл оказывается несобственным:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

10.3.2. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины — важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение средне-

го арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.

Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.

О п р е д е л е н и е. *Дисперсией* (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

Если дисперсия мала, то значения случайной величины в среднем мало отклоняются от математического ожидания, а если велика, то отклонения могут быть большими.

В более подробной записи дисперсия $D(X)$ выражается формулой

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + \dots + [x_n - M(X)]^2 p_n = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i.$$

Здесь x_i — возможные значения случайной величины X , а p_i — их вероятности.

Оказывается, что дисперсию можно вычислить и по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

т.е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата ее математического ожидания. Здесь, очевидно, $M(X^2) = x_1^2 p_1 + \dots + x_n^2 p_n$.

Можно доказать, что дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Пусть, например, случайная величина распределяется по биномиальному закону: событие A наблюдается в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Вычислим дисперсию числа появлений события A .

Пусть в i -м опыте число появлений события A равно x_i . Ясно, что x_i может принять значение 1 с вероятностью p и значение нуль с вероятностью q , и поэтому

$$M(x_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p;$$

$$D(x_i) = M(x_i^2) - [M(x_i)]^2 = (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q) - p^2 = p(1-p) = pq$$

Тогда число появлений события A в n испытаниях равно $X = \sum_{i=1}^n x_i$, и, в силу независимости опытов, $X = \sum_{i=1}^n D(x_i)$. Но все дисперсии $D(x_i)$ одинаковы и равны pq . Поэтому получаем окончательно $D(X) = npq$.

Таким образом, мы уже знаем определенные выше характеристики для одного из важнейших законов распределения — биномиального, который определяется формулами Бернулли для числа появления события A в n независимых испытаниях:

$$M(X) = np \text{ и } D(X) = npq.$$

Эти результаты находят применение в теории стрельбы.

Математическое ожидание числа попаданий при нескольких выстрелах равно сумме вероятностей попадания при отдельных выстрелах, а его дисперсия равна сумме произведений вероятности попадания на вероятность промаха в каждом выстреле.

Дисперсия — весьма полезная характеристика случайной величины. Но она имеет несколько определенных недостатков. Один из самых существенных связан с размерностью дисперсии по сравнению с размерностью самой случайной величины. Дело в том, что многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2 . Поэтому вводят еще одну характеристику, называемую *среднеквадратическим отклонением* и обычно обозначаемую буквой σ :

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пусть теперь случайная величина является непрерывной. Тогда для ее дисперсии и среднеквадратического отклонения используется формула

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx,$$

где x — значения случайной величины X , находящиеся в пределах отрезка $[a, b]$, $f(x)$ — плотность распределения.

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Ясно, что в случае, когда возможный диапазон изменения значений случайной величины распространяется на всю прямую, соответствующий интеграл оказывается несобственным и берется на промежутке от $-\infty$ до $+\infty$.

Кроме перечисленных выше параметров часто вводят еще несколько, позволяющих описать некоторые другие свойства закона распределения. Особенно много таких характеристик связано с эмпирическими законами распределения, которые реально возникают в результате опыта. Их рассматривают в так называемой математической статистике. Что касается теоретических законов распределения, то самые важные из них однозначно определяются всего одним-двумя параметрами, фиксирующими конкретную функцию $F(x)$ или $f(x)$ в данном классе функций. Обсудим более подробно, пожалуй, самый важный теоретический закон распределения непрерывной случайной величины, называемый *нормальным*.

10.3.3. Нормальный закон распределения и его параметры

Непрерывная случайная величина называется *распределенной нормально*, если плотность ее вероятности выражается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ранее эта функция уже была исследована (см. подразд. 7.4.4), точнее, класс функций, определяемый данной формулой и двумя числовыми параметрами a и σ .

Оказывается, что если подсчитать математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для нормального закона распределения по формуле, приведенной в подразд. 10.3.1 и 10.3.2 для непрерывной случайной величины, то их значения совпадут с a и σ (мы опускаем эти вычисления).

Изменяя математическое ожидание, мы смещаем кривую вдоль оси Ox , а изменяя σ , меняем форму кривой: при малых σ всплеск кривой вблизи точки $x = a$ становится более крутым и узким, а при увеличении σ он сглаживается и расплывается (рис. 159).

При этом площадь (бесконечной) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $f(x)$, во всех случаях остается равной 1.

Вероятность попадания случайной величины на произвольный отрезок $[x_1, x_2]$ можно подсчитать интегралом

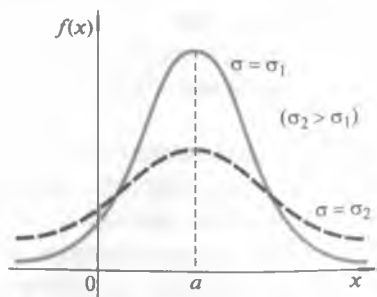


Рис. 159

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Как мы уже знаем, этот интеграл не выражается через элементарные функции, поэтому для его вычисления используются таблицы, составленные для функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

т. е. для частного случая нормально-

го распределения, когда $a = 0$ и $\sigma = 1$.

В итоге получается формула

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Полезно заметить, что $P(|X - a| < \sigma) \approx 0,68$, т. е. при нормальном распределении случайной величины около 68 % ее значений не отклоняется от математического ожидания более чем на одно среднее квадратическое отклонение.

Далее $P(|X - a| < 2\sigma) \approx 0,95$ и, наконец, $P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0,9973$.

Последнее означает, что превосходящие 3σ отклонения значений нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания крайне маловероятны. На практике возможностью таких маловероятных отклонений можно пренебречь — это *правило трех сигм*.

Важность нормального закона распределения случайной величины объясняется своего рода универсальностью его возможного использования в качестве модели многих непрерывных случайных величин. Как показал А. М. Ляпунов, верна следующая предельная теорема.

Т е о р е м а. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Примерами использования этого закона могут служить многочисленные варианты решения задач приближенного измерения различных величин, теория стрельбы, некоторые экономические модели и т. п. Для случайных величин, распределенных по нормальному закону, разработаны многочисленные специальные методы матема-

тического анализа их свойств и взаимосвязей, составлены удобные в практическом применении таблицы.

На практике соответствующие законы распределения обычно возникают как эмпирические и, вообще говоря, как неизвестные. Для того чтобы создать возможность анализировать их на основе теоретических вероятностных схем, часто бывает необходимо проверить, можно ли принять гипотезу о близости эмпирического закона распределения к нормальному. Заметим, что такая гипотеза нередко и отвергается, например в случаях, когда на данную случайную величину оказывает достаточно большое влияние какой-то определенный фактор, явно выделяющийся своим значением среди остальных влияющих факторов. Тогда кривая плотности распределения может стать асимметричной (что может быть выражено специальным показателем) и, вообще, может оказаться в ином классе функций. Некоторые из теоретических распределений, не являющихся нормальными, тоже важны. Среди них так называемое показательное распределение «хи-квадрат», распределения Стьюдента, Фишера и др. Понятно, что с точки зрения общей теории не так уж существен тип закона распределения, как сам факт, что он известен. Тогда при любом законе распределения можно производить все необходимые практические оценки основных параметров.

10.4. ПРОСТЕЙШИЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

10.4.1. Понятие о выборочном методе

Математическая статистика — раздел математики, опирающийся на теорию вероятностей и ставящий своей задачей создавать методы сбора и обработки статистических данных для получения обоснованных научных и практических выводов о закономерностях окружающего мира. Соответствующие данные могут быть получены в результате наблюдений или специальных экспериментов, при этом возникают проблемы сохранения в них существенной информации, рационального математического описания, планирования эксперимента, определения необходимого объема наблюдений. Следующий важный этап — поиск взаимосвязей между показателями, с помощью которых могут быть описаны упомянутые закономерности, оценки существенных параметров и величин, интересующих ис-

следователя. Все это характерные для математической статистики проблемы.

Чаще всего речь идет об информации о так называемой *генеральной совокупности* объектов. Например, о совокупности всех технических изделий определенного типа (о промышленных деталях), о больших социальных группах людей, о массовых явлениях и т. п. Исследовать все элементы генеральной совокупности, как правило, невозможно либо нецелесообразно (бессмысленно, например, определять срок годности производимых электрических лампочек, подвергая соответствующему испытанию все лампочки). В таких случаях исследуется *выборочная совокупность* или, кратко, *выборка*. Число объектов в выборке называют ее *объемом*.

Понятно, что информация о генеральной совокупности, полученная на основе выборки, является приближенной. Если иметь в виду возможности использования теории вероятностей в проводимом исследовании, то естественно считать ее случайной. Правда, формируя выборку, необходимо создать определенные условия для корректности такого рассмотрения.

Прежде всего надо позаботиться о том, чтобы сама процедура выбора не привнесла посторонней информации. Известны многочисленные случаи, когда нарушение этого условия приводило к ошибочным выводам всего исследования. Если, например, социолог, интересуясь мнением населения района о каком-то вопросе, будет опрашивать жителей по телефону, то он должен учесть, что наличие домашнего телефона у жителя — существенный посторонний фактор, тем более что в беседе с ним с большей вероятностью примет участие человек, по тем или иным причинам много времени проводящий дома.

Далее, необходимо, чтобы в выборке нашла отражение информация, существенная для генеральной совокупности и интересующая исследователя. Иначе говоря, выборка должна правильно представлять закономерности структуры генеральной совокупности, т. е. быть *репрезентативной*.

Одно из существенных условий репрезентативности — формирование выборки по принципу случайности, когда элементы генеральной совокупности имеют равные шансы попасть в выборку. К сожалению, это условие не является достаточным, и, более того, обеспечение репрезентативности выборки выходит за рамки чисто математической задачи. В зависимости от конкретных условий исследования может применяться случайный отбор из всей генеральной совокупности, случайный отбор после разбиения генеральной совокупности на некоторые части и т. д.

В любом случае результатом формирования выборки будет так называемый *вариационный ряд*, в котором указаны наблюдаемые значения статистического показателя и соответствующие им частоты. По сути, это аналог закона распределения дискретной случайной величины, в котором вместо вероятности указаны частоты, — *эмпирическая функция распределения*:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Здесь x_i — наблюдаемое значение статистического показателя, а n_i — либо количество соответствующих наблюдений N_i , либо относительная частота, т.е. $n_i = \frac{N_i}{N}$, где N — общее число наблюдений (второй случай мы далее и будем иметь в виду).

Если случайная величина, связанная с данным показателем, является непрерывной, то обычно весь диапазон ее возможных изменений разбивается на равные промежутки, и тогда n_i — это частота попадания показателя в соответствующий интервал. В итоге эмпирическая функция распределения предстает в виде таблицы:

$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_1, x_2]$	$[x_2, x_3]$	...	$[x_k, x_{k+1}]$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Здесь показатель x может изменяться в пределах от x_1 до x_{k+1} , а участки разбиения имеют равную длину $h = \frac{x_{k+1} - x_1}{k}$.

Вариационный ряд при больших размерах таблицы не очень удобен для некоторых видов исследования, поскольку не является наглядным. Поэтому часто применяют его наглядные аналоги в виде полигона или гистограммы.

Полигон — это ломаная, соединяющая точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ (рис. 160).

Гистограмма — это ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников с основаниями $[x_i, x_{i+1}]$ и высотой $\frac{n_i}{h}$, где h — длина промежутка разбиения (рис. 161).

Заметим, что площадь гистограммы равна сумме относительных частот, т.е. единице. Таким образом, гистограмма является аналогом графика плотности вероятности закона распределения случайной величины.

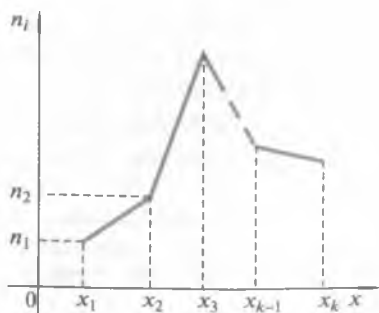


Рис. 160

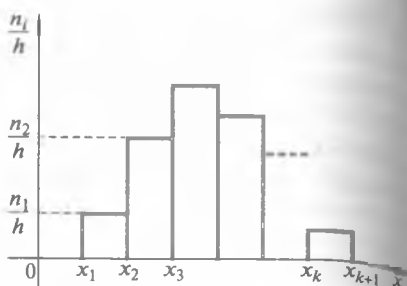


Рис. 161

Пусть, например, некто проводил наблюдения ($n = 50$) за своим временем ожидания автобуса при случайном выходе на остановку и получил следующий вариационный ряд:

$[t_i, t_{i+1}]$	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$	$[6, 8]$	$[8, 10]$
n_i	0,1	0,2	0,36	0,22	0,12

Здесь $h = 2$, поэтому соответствующая гистограмма имеет вид, как показано на рис. 162.

Итак, пусть получено эмпирическое распределение. Его предстоит использовать для суждения о генеральной совокупности. Ситуация значительно упрощается, если для генеральной совокупности известен закон распределения (например, из некоторых теоретико-вероятностных соображений). Если это, предположим, нормальный закон распределения, то оценить надо всего два параметра: математическое ожидание и дисперсию

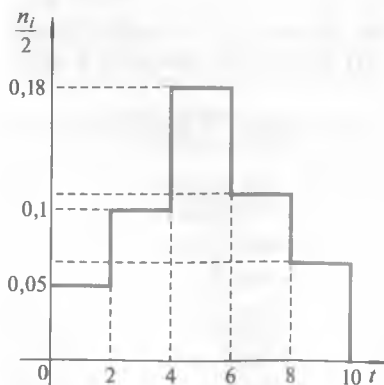


Рис. 162

или среднее квадратическое отклонение). Тогда закон распределения будет однозначно определен. Сложнее ситуация, когда вид закона неизвестен. В этом случае следует попытаться сначала получить информацию об этом законе по вариационному ряду. Чаще всего это делается на основе выдвижения и проверки так называемых *статистических гипотез*. Мы обсудим кратко данную идею в подразд. 10.4.3, а здесь предположим,

что имеет место более простой случай нормального распределения и, следовательно, нас интересуют генеральные параметры a и σ ($\sigma = \sqrt{D}$) (см. подразд. 10.3.2).

Если объем выборки очень велик, то по закону больших чисел в качестве параметра a можно принять $\bar{x}_g$ — *среднюю арифметическую для выборки*, а в качестве дисперсии — D_g — *выборочную дисперсию*. Проблема возникает как раз для выборок, объем которых существенно меньше объема генеральной совокупности. Тогда $\bar{x}_g$ и D_g являются случайными величинами по отношению к a и D .

*↓ Теоретически доказывается, что математическое ожидание $\bar{x}_g$ равно a , т.е., как говорят, $\bar{x}_g$ является *несмещенной* оценкой для a . То же самое нельзя сказать о D_g : несмещенной оценкой для D является величина $\frac{nD_g}{n-1}$

и поэтому $\sigma_g = \sqrt{\frac{nD_g}{n-1}}$. В итоге оказывается, что при оценке величины a по $\bar{x}_g$ возникает ошибка

$$m = \frac{\sigma_g}{\sqrt{n}},$$

если генеральную совокупность можно считать бесконечной, или

$$m = \frac{\sigma_g}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

где N — объем генеральной совокупности.

Аналогично ошибка среднеквадратического отклонения выражается формулой

$$m_\sigma = \frac{\sigma_g}{\sqrt{2n}}.$$

Эти формулы уже можно практически использовать для оценки параметров генеральной совокупности по параметрам выборки. При этом следует иметь в виду, что оценки будут статистическими, т.е. всегда существует больший или меньший риск допустить ошибку, приняв такие оценки. Этот риск можно увеличивать или уменьшать, выбирая надежность (вероятность) безошибочных прогнозов.

Традиционно выбирают среди трех *уровней надежности*:

- а) $p \geq 0,95$ (низкий);
- б) $p \geq 0,99$ (средний);
- в) $p \geq 0,999$ (высокий).

Низкий уровень выбирают в тех случаях, когда возможная ошибка не имеет серьезных социальных, экономических и т.п. последствий. (Например, в большинстве практико-экономических, биологических, психолого-педагогических исследований и оценок.)

Средний уровень связан с риском более серьезных экономических потерь, повышенными социальными последствиями ошибки.

Наконец, высший уровень надежности выбирают в случае, когда ошибка угрожает жизни людей, допускает возникновение различного рода катастроф.

Ясно, что с повышением уровня надежности резко падает возможность извлечь позитивное, пригодное к практическому использованию суждение о генеральной совокупности по выборке. Требования к объему выборки могут возрасти столь стремительно, что сам выборочный метод окажется неприменимым или чрезмерно затратным.

Смысл уровня надежности легко понять, вспомнив правило трех сигм (см. подразд. 10.3.3): величина надежности характеризует вероятность отклонения случайной величины от ее математического ожидания, соответственно, на $t_1 = 1,960$; $t_2 = 2,576$; $t_3 = 3,291$ величины показателя σ (закон распределения необязательно является нормальным, но при $n \rightarrow \infty$ должен к нему приближаться, как, например, уже упомянутое распределение Стюдента).

Для ориентира укажем и приблизительные объемы выборок, связанные с приведенными уровнями значимости: а) $n_1 \geq 30$; б) $n_2 \geq 100$; в) $n_3 \geq 200$.

Зная величины t_1, t_2, t_3 , можно оценить возможные границы генерального параметра (их называют *доверительными*) по формулам

$$\bar{x}_g - t\sigma_g \leq a \leq \bar{x}_g + t\sigma_g;$$

$$\sigma_g - tm_\sigma \leq \sigma \leq \sigma_g + tm_\sigma,$$

где $\sigma_g = \sqrt{\frac{D_g n}{n-1}}$ — «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение. ↑*

Кроме выборочной средней $\bar{x}_g = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{n}$ (здесь x_i — значения случайной величины, m_i — число их наблюдений, n — объем выбор-

ки), выборочной дисперсии $D_g = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_g)^2}{n}$, а также выборочного

среднеквадратического отклонения $\sigma_g = \sqrt{\frac{n D_g}{n-1}}$ применяются и некоторые другие простые характеристики вариационного ряда. Среди них:

- *мода* — значение переменной величины, имеющее наибольшую частоту;

- *медиана* — значение переменной, делящее вариационный ряд на две части, равные по числу возможных его значений;
- *размах варьирования* — разность между наибольшим и наименьшим значениями переменной величины;
- *коэффициент вариации* — $V = \frac{\sigma_g}{\bar{x}_g} \cdot 100\%$ (при $\bar{x}_g \neq 0$) (безразмерная величина, характеризующая рассеяние величины по отношению к выборочной средней) и др.

* 10.4.2. Понятие о корреляциях и регрессиях

Пусть заданы две случайные величины X и Y , которые могут оказаться взаимосвязанными. Возможно, что эта взаимосвязь функциональная, т. е. каждому значению $x \in X$ соответствует единственное значение $y \in Y$. В предыдущих подразделах рассматривались именно функциональные взаимосвязи переменных. Однако для случайных величин функциональная взаимосвязь реализуется очень редко. Гораздо чаще изменение значений одной из них влечет за собой изменение закона распределения другой. Такие взаимосвязи называют *статистическими*. В частности, статистическая взаимосвязь может проявляться в том, что изменение значений одной из них приводит к изменению среднего арифметического значения другой. Такого рода статистическую взаимосвязь называют *корреляционной*.

Пусть, например, Y — урожай зерна, а X — количество удобрений. Функциональной взаимосвязи между X и Y , очевидно, нет, так как на величину урожая влияет множество других факторов: количество осадков, температура, насекомые-вредители и т. д. Однако, как хорошо известно из опыта, количество внесенных удобрений изменяет среднюю величину урожая.

Ясно, что если между двумя случайными величинами отсутствует корреляционная связь, то это еще не означает, что отсутствуют какие-то другие статистические взаимосвязи.

Оказывается, что о наличии или отсутствии, а также о «тесноте» корреляционной связи можно судить по показателю, называемому *коэффициентом корреляции*:

$$r_{xy} = \frac{M\{[X - M(x)][Y - M(Y)]\}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где M — математическое ожидание указанных в скобках величин, а σ_x, σ_y — среднеквадратические отклонения.

Рассмотрим эту формулу повнимательнее. Предположим вначале, что с увеличением величины X величина Y в среднем увеличивается. Тогда произведения выражений в квадратных скобках будут чаще положительными, чем отрицательными. В итоге окажется, что $r_{xy} > 0$, причем r_{xy} окажется тем больше, чем более четко выражена указанная тенденция увеличения. Однако самое большое число, которого может достигнуть r_{xy} , равно 1, в чем можно убедиться, учитывая формулы для дисперсии (эти оценки мы опускаем).

Возможна и другая тенденция: с увеличением одного показателя другой в среднем убывает. Тогда $r_{xy} < 0$ и будет тем меньше, чем более четко выражена указанная тенденция. Минимум для r_{xy} равен (-1) .

Наконец, если ни та ни другая тенденция не выражены, то положительные и отрицательные слагаемые в числителе в среднем компенсируют друг друга и $r_{xy} \approx 0$, что означает отсутствие между случайными величинами X и Y корреляционных связей.

Задача исследования корреляционных связей возникает, как правило, для выборки. Тогда подсчитывается *выборочный коэффициент корреляции*. Укажем одну из вычислительных формул:

$$r_s = \frac{\sum n_{xy}xy - \bar{n}xy}{n\sigma_x\sigma_y},$$

где x, y — наблюдаемые в выборке значения величин X и Y ; n_{xy} — частоты соответствующих пар наблюдаемых значений; n — объем выборки (сумма всех частот); $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ — выборочные средние квадратические отклонения; $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние; суммирование производится по всевозможным парам наблюдаемых значений.

Заметим, что в современных условиях массового распространения

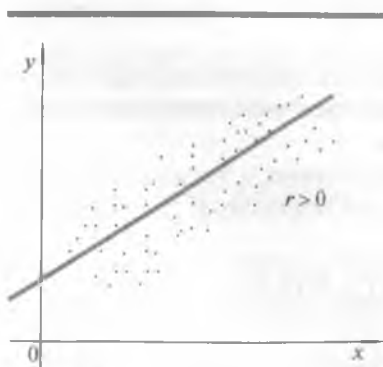


Рис. 163

компьютеров, оснащения их стандартными программами статистической обработки данных исследователю редко приходится считать показатели, о которых мы ведем речь (так же как и многие другие, обсуждавшиеся выше). Зато повышенную значимость приобретают понимание смысла таких вычислений и возможность содержательного истолкования полученных результатов. Поэтому запоминание указанных формул не является особенно важным.

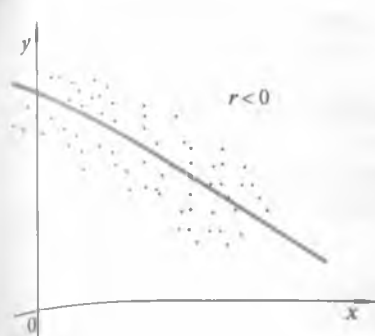


Рис. 164

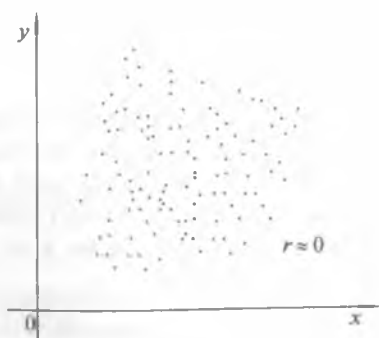


Рис. 165

В частности, полезно иметь в виду геометрическое истолкование коэффициента корреляции. Каждая выборка для величин X и Y , взаимосвязь которых исследуется, геометрически может быть истолкована как «облако» точек на плоскости. Описанные выше тенденции в статистической взаимосвязи X и Y выражаются в том, что «облако» оказывается «вытянутым» в направлении некоторой прямой (рис. 163 — 165).

Чем более «облако» напоминает отрезок какой-то прямой, тем ближе $|r|$ к 1.

Разумеется, речь идет о некоторой наилучшей прямой, которую называют *прямой регрессии*. Ее общая формула: $y = kx + b$, причем коэффициенты k и b должны быть выбраны так, чтобы сумма квадратов отклонений точек «облака» от прямой оказалась минимальной, т.е. достигался минимум

$$\min_{(a,b)} \sum_i [(kx_i - b) - y_i]^2$$

(для простоты предполагаем, что каждому значению x , в «облаке» соответствует единственное y). Такой подход к поиску наилучшей прямой носит название *метода наименьших квадратов*.

Возникает задача поиска точек минимума функции от двух переменных k и b . Решается она по известной читателю схеме: вычисляются производные от указанной суммы по k и b и приравняются нулю. Из полученной в результате алгебраической системы двух уравнений с неизвестными k и b последние однозначно определяются. Приведем лишь окончательный результат: прямая регрессии Y на X имеет уравнение

$$y - \bar{y} = r_{\sigma} \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} (x - \bar{x}),$$

где r_{σ} — выборочный коэффициент корреляции; $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\sigma}_y$ — выборочные среднеквадратические отклонения; $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние арифметические значения выборочных значений случайных величин.

Величины X и Y можно поменять ролями. Тогда аналогично возникает прямая регрессии X на Y :

$$x - \bar{x} = r_{\sigma} \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_y} (y - \bar{y}).$$

Если это уравнение переписать в виде $y - \bar{y} = \frac{1}{r_{\sigma}} \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} (x - \bar{x})$, то оче-

видно, что в общем случае $\frac{1}{r_{\sigma}} \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} \neq r_{\sigma} \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x}$, поскольку $\frac{1}{r_{\sigma}} \neq r_{\sigma}$, если

только $r_{\sigma}^2 \neq 1$, т.е. $|r_{\sigma}| \neq 1$. Иначе говоря, регрессии X на Y и Y на X в общем случае не совпадают: такое совпадение возникает только при $|r_{\sigma}| = 1$.

Таким образом, существование корреляционной связи величин X и Y означает, что наблюдаемая статистическая взаимосвязь этих величин может быть описана приближенно линейной функцией. Приближение оказывается тем более точным, чем ближе $|r_{\sigma}|$ к 1. При $r_{\sigma} = 0$ линейная статистическая связь отсутствует, а при $|r_{\sigma}| = 1$ она оказывается точно линейной.

На практике считают, что при $0 \leq r \leq 0,5$ случайные величины слабо коррелированы, и можно говорить лишь о некоторых тенденциях возрастания (убывания) в среднем значений одной величины при изменении другой. При $0,5 \leq r \leq 0,8$ корреляции средние: упомянутые тенденции выражены довольно четко. При $0,8 \leq r \leq 1$ корреляция сильная, позволяющая даже прогнозировать значения одной величины по значениям другой. Подчеркнем, что коэффициент корреляции для выборки тоже является случайной величиной, и поэтому следует оценивать его надежность. Для этого существуют специальные формулы: при счете по стандартным компьютерным программам надежность обычно оценивается «автоматически» по обозначенным выше стандартным уровням значимости. Ясно, что незначимые коэффициенты корреляции не могут быть использованы для описанного выше содержательного истолкования.

Заметим, что метод наименьших квадратов применим и при поиске нелинейных статистических связей случайных величин, а вы-

числение парных коэффициентов корреляции между несколькими случайными величинами является исходной основой довольно сложных методов статистической обработки результатов наблюдений (например, так называемого факторного анализа).

* 10.4.3. Понятие о проверке статистических гипотез

При решении многих задач математической статистики очень важно знать закон распределения случайной величины или, если тип закона распределения известен, его неизвестные параметры. Однако информация, которой на практике располагает исследователь, чаще всего не выходит за рамки соответствующих гипотез. Поэтому задача создания математических методов их проверки и практического применения в конкретных случаях является типичной для математической статистики.

Заметим, что речь идет не о любых гипотезах, а именно о *статистических*, т.е. так или иначе связанных с законами распределения случайных величин. Характерные примеры: гипотеза о том, что изучаемая случайная величина распределена по нормальному закону; гипотеза о том, что изучаемый параметр закона распределения равен данному числу (или, скажем, находится в определенном интервале этого числа); гипотеза о том, что две изучаемые выборки относятся к одному или, наоборот, к разным законам распределения. А вот, например, гипотеза о том, что ближайшее лето будет дождливым, статистической не является.

В математической статистике принято выдвинутую гипотезу H_0 называть нулевой. Обычно наряду с нулевой гипотезой рассматривают и альтернативную ей H_1 или, как говорят, конкурирующую. Суть альтернативной гипотезы — отрицание утверждения, содержащегося в H_0 . Прием одновременного рассмотрения нулевой и альтернативной гипотез является важным конструктивным средством проверки статистических гипотез. Действительно, опровергнув альтернативную гипотезу (это нередко проще, чем пытаться напрямую подтвердить нулевую), можно считать доказанной H_0 .

Естественно, что выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, и поскольку ее проверку придется производить статистическими методами, не дающими абсолютных гарантий, возможно возникновение ошибок разного рода: можно ошибочно отвергнуть правильную гипотезу; можно принять неправильную гипотезу. Оценка риска совершить такие ошибки чаще всего связана

с уровнями надежности суждений, подобными тем, что обсуждались в подразд. 10.4.1.

Общая теоретическая схема проверки гипотез такова. Для каждой типовой статистической гипотезы разрабатывают критерий k , в роти которого выступает некоторая специально конструируемая случайная величина. Величина k такова, что по ее значению или по расположению в диапазоне возможного изменения можно решить вопрос принимается гипотеза или отвергается. Для большинства типов статистических гипотез закон распределения не является нормальным, но его вид удается установить. Многие из таких законов носят имена ученых, которые их исследовали: распределение Стьюдента, Фишера, Пирсона и др. Для них составлены специальные таблицы значений. Пользуясь ими, можно по выборке вычислить значения критерия и определить, возможно ли принять нулевую гипотезу.

Поясним эту общую схему одним примером. Предположим, исследователь хотел бы подтвердить математико-статистическими средствами более высокую эффективность некоторого метода массового применения по сравнению с другим методом. Скажем, большую действенность предлагаемого лекарства, большую экономичность производства продукции, более высокую урожайность при применении новой агротехники и т.д.

С этой целью он провел два выборочных исследования, в первом из них применялись традиционные методы, а во втором — новые. Подсчитав средние значения показателей эффективности для этих выборок, он, предположим, обнаружил, что новый метод дает более высокие средние показатели. Но не возник ли такой результат случайно, из-за случайности выборки?

С математико-статистической точки зрения исследователь должен доказать, что средние арифметические в этих выборках отличаются достоверно (на избранном уровне надежности). Для таких задач предложен следующий критерий достоверности различий:

$$k = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}},$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ — выборочные средние, а m_1 и m_2 — ошибки выборочных средних ($m = \frac{\sigma_a}{\sqrt{n}}$). Если величина k отличается от нуля на величину, большую той, что определяет избранный уровень надежности (см. подразд. 10.4.1), то альтернативная гипотеза о том, что $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ различаются лишь случайно, должна быть отвергнута и тем самым доказана достоверность различий средних.

Оказывается, что величина k распределена по уже неоднократно упомянутому закону Стьюдента. Поэтому вычисленное значение k следует сравнивать с табличным t для избранного уровня надежности. Если $k > t$, то достоверность различий считается подтвержденной.

Для приближенного ориентира напомним, что при большом объеме выборки ($n \geq 30$) распределение Стьюдента практически не отличается от нормального. Поэтому получение значения $k \approx 3$, по сути, равносильно применимости правила трех сигм, гарантирующего очень высокую надежность. Для меньших значений k риск совершить ошибку, посчитав различия неслучайными, возрастает: таблицы позволяют оценить его величину.

Заметим, что уменьшение объема выборок довольно резко снижает достоверность различий при данном показателе k . Поэтому на практике, не доказав достоверности различий в рамках данного исследования, еще не следует делать вывод о том, что новый метод не является более эффективным, чем традиционный. Вполне возможно, что, проведя дополнительные исследования с большим объемом выборок, такие доказательства удастся получить.

Задания к главе 1. Множества и функции

1.1. Задайте множество A , указав все его элементы, если $A = \{x: x \in \mathbb{N}, -7 < x \leq 9\}$.

1.2. Составьте список элементов множества, заданного следующим образом:

а) $M = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$; б) $P = \{x: x \in \mathbb{N}, -3 < x \leq -1\}$.

1.3. Верно ли, что:

а) $\{3, 5\} \in \{\{1, 2\}, \{4, 3\}, \{3, 5, 1\}, 3, 5\}$;

б) $\{3, 5\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{4, 3\}, \{3, 5, 1\}, 3, 5\}$?

1.4. Выписав все элементы множества всех подмножеств множества $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, подсчитайте их число.

1.5. Докажите, что $A = B$, если $A = \{1, 6\}$; $B = \{x: x^2 - 7x + 6 = 0\}$.

1.6. Докажите тождество $A \cup A = A \cap A = A$.

1.7. Будет ли $-10 \in A \cap B$, где $A = \left\{x: x + \frac{1}{1-x} < 3\right\}$;
 $B = \{x: -2x + 4 > 5\}$?

1.8. Дана функция $f(x) = x^2 + 3$. Найдите $f(0)$; $f(1)$; $f(-2)$; $f(\sqrt{2})$;
 $f(3\sqrt{3})$; $f(\sqrt{2}-1)$; $f(\sqrt{2}+1)$.

1.9. Дана функция $F(x) = x^2$. Вычислите:

а) $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$; б) $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$.

1.10. Дана функция $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$. Чему равно $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$;
 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$?

1.11. Напишите несколько первых членов последовательностей:

а) $x_n = n^2$; б) $x_n = \frac{1}{n^2}$; в) $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$; г) $x_n = \frac{n}{2n-1}$.

1.12. Напишите последовательность значений переменной $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$ и изобразите ее изменение графически.

1.13. Найдите наименьший член последовательности $x_n = n + \frac{1}{n}$.

1.14. Можно ли сказать, что если $A = B$, то между множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие ($A \sim B$), и наоборот, если $A \sim B$, то $A = B$?

1.15. Установите для $a < b$ взаимно-однозначное соответствие между множествами $A = \{x: x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 1\}$ и $B = \{y: y \in \mathbb{R}, a \leq y < b\}$.

1.16. Найдите функции, обратные данным:

а) $y = 3x + 2$; б) $y = \frac{2x}{1-x}$; в) $y = \sqrt[3]{x-2}$.

1.17. При равномерном движении точки по прямой путь S прямо пропорционален времени движения t . Укажите общую форму взаимосвязи $S = f(t)$. Каков смысл коэффициента пропорциональности? Найдите коэффициент пропорциональности, если известно, что за 3 с точка прошла расстояние 2 м.

1.18. Сила отталкивания между двумя положительными электрическими зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Запишите общую формулу для величины силы.

1.19. Участок земли площадью 2 га поделен на две части в пропорции 2 : 3. Укажите площади участков.

1.20. Постройте график функции «целая часть числа x »: для каждого числа x вычисляется наибольшее целое число $E(x)$, не превосходящее x .

1.21. Постройте график функции «дробная часть числа x », т.е. $y = x - E(x)$, где $E(x)$ — целая часть числа x .

1.22. Какое множество точек в пространстве образуется в результате декартова произведения множества точек круга на перпендикулярный ему отрезок $[a, b]$?

1.23. Если число A составляет $p\%$ числа B , то верна формула $A = \frac{B}{p} \cdot 100$. Укажите формулы, по которым можно найти:

а) число B , зная, что оно составляет $p\%$ от числа A (т.е. число по его процентам);

б) число процентов, которое составляет число B от числа A (т.е. процентное отношение чисел).

Придумайте задачи на использование этих формул.

1.24. Установите, будет ли значение $x = 5$ решением конструкции неравенств:

$$\begin{cases} x+3 > 5; \\ 2x-1 < 3; \\ x-4 < 2; \\ x-5 < 3. \end{cases}$$

1.25. Будет ли тождеством равенство:

а) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; б) $\frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$?

В задачах 1.26 — 1.39 решите уравнения.

1.26. $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x+2}{x-1} - 2 = 0$.

1.27. $\frac{9x+5}{6(x-1)} + \frac{3x^2-51x-71}{18(x^2-1)} = \frac{15x-7}{9(x+1)}$.

1.28. $\frac{1}{x-3} + \frac{7}{x+3} = \frac{14}{x^2-9} - \frac{x-4}{x-3}$.

1.29. $\frac{3}{2(x^2-1)} - \frac{1}{4(x+1)} = \frac{1}{8}$.

1.30. $\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2-a^2}$.

1.31. $3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x = 0$.

1.32. $\left(\frac{x+3}{5}\right)^6 - 9\left(\frac{x+3}{5}\right)^3 + 8 = 0$.

1.33. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{a+b}{a-b}$.

1.34. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

1.35. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}$.

1.36. $\sqrt{3+x} = 3-x$.

1.37. $\sqrt{2x^2+1} = 1-x$.

1.38. $\sqrt{x^2-1} = x-2$.

1.39. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$.

В задачах 1.40 — 1.48 решите неравенства.

1.40. $\frac{1}{2}(x-3) - \frac{2}{5} < \frac{x-3}{4} - \frac{1}{2}$.

1.41. $x^2 + 3x + 10 < 0$.

1.42. $x^2 + 2x + 1 > 0$.

1.43. $\frac{(1-x)^2}{5+x} < 0$.

1.44. $\frac{2}{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$.

$$1.45. \sqrt{x^2 + x - 1} < x - 1.$$

$$1.46. \sqrt{1 + 8x^2} > 2x - 1.$$

$$1.47. \sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}.$$

$$1.48. \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 2.$$

В задачах 1.49—1.51 решите систему неравенств и дайте геометрическую иллюстрацию решения.

$$1.49. \begin{cases} 3x + 4y > 10; \\ x - y > 5. \end{cases}$$

$$1.50. \begin{cases} 2x - y \leq 1; \\ x + 2y \leq 2. \end{cases}$$

$$1.51. \begin{cases} x + y < 5; \\ 3x + 3y > 6. \end{cases}$$

Задания к главе 2. Числовые множества

2.1. Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел:

а) 224, 352, 800; б) 340, 561, 867; в) 234, 598, 1274.

2.2. Запишите следующие числа в виде произведения трех простых чисел:

а) 78; б) 805; в) 957.

2.3. Укажите, какие из приведенных чисел делятся на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25:

а) 200; б) 234; в) 342; г) 1280; д) 1785; е) 5130; ж) 8643.

2.4. Укажите все простые числа от 1 до 60.

2.5. Укажите все составные числа от 40 до 70.

2.6. Являются ли указанные числа парами взаимно простых чисел:

а) 26 и 105; б) 282 и 711; в) 145 и 190; г) 170 и 483; д) 114 и 174?

2.7. Разложите на простые множители число 899.

2.8. Найдите наименьшее натуральное число большее десяти, которое при делении на 24, 45 и 56 давало бы в остатке 1.

2.9. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального n справедливы равенства:

$$а) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2;$$

$$б) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$в) (1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3;$$

$$\text{г) } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}; \quad n > 1;$$

$$\text{д) } 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

2.10. Докажите, что: а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; г) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$ — иррациональные числа.

2.11. Найдите десятичные приближения с недостатком и с избытком с точностью до 0,001 для чисел:

$$\text{а) } \pi = 3,14159\dots; \quad \text{б) } \frac{180}{\pi} = 57,29578\dots^\circ; \quad \text{в) } e = 2,71828\dots;$$

$$\text{г) } \lg 10 = 2,30258\dots$$

2.12. Рациональные числа представьте в виде конечных десятичных дробей:

$$\text{а) } \frac{7}{200}; \quad \text{б) } \frac{327}{400}; \quad \text{в) } -\frac{352}{125}; \quad \text{г) } -\frac{3149}{2500}.$$

2.13. Представьте в виде десятичной периодической дроби следующие числа:

$$\text{а) } \frac{3}{7}; \quad \text{б) } 5\frac{2}{3}; \quad \text{в) } -7\frac{1}{9}; \quad \text{г) } 3\frac{9}{11}.$$

2.14. Запишите в виде обыкновенной дроби следующие десятичные (периодические) дроби:

$$\text{а) } 0,(3); \quad \text{б) } 0,1(7); \quad \text{в) } 0,(11); \quad \text{г) } 0,(481); \quad \text{д) } -0,(27).$$

2.15. Радиус Земли в километрах равен 6356,909. Округлите это число до двух-, трех-, четырехзначных цифр.

2.16. Расстояние между двумя городами, измеренное по карте, равно 24,6 см (± 2 см). Определите фактическое расстояние между ними и абсолютную погрешность, если масштаб карты 1 : 2 500 000.

2.17. Какое из двух измерений более точное:

$$\text{а) } 6 \text{ м } (\pm 0,01 \text{ м}); \quad \text{б) } 345 \text{ м } (\pm 0,5 \text{ м})?$$

2.18. Найдите, со сколькими верными знаками можно определить радиус круга, если известно, что его площадь равна $124,32 \text{ см}^2$ (с точностью до $0,01 \text{ см}^2$).

2.19. Число $g = 9,8066$ является приближенным значением ускорения свободного падения с пятью верными знаками. Найдите его относительную погрешность.

2.20. Вычислите абсолютную и относительную погрешности, возникающие при замене приближенного значения числа $\pi \approx 3,1416$ более грубым приближением $\pi \approx 3,14$.

2.21. Вычислите с помощью микрокалькулятора:

$$a) x = \frac{0,0615 \cdot 19,8 \cdot 60,4}{3,08 \cdot 46,2}; \quad б) x = \frac{0,075^2 \cdot \sqrt[3]{3,27}}{0,915^3 \cdot \sqrt{0,826}}$$

2.22. Найдите: а) $|2|$; б) $|1 - \sqrt{2}|$; в) $\left| \frac{1}{1-x} \right|$.

2.23. Может ли между двумя различными действительными числами быть только 1 000 рациональных чисел?

2.24. Докажите, что уравнения $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$ и $3x + 17 = 7x + 9$ равносильны на множестве рациональных чисел.

2.25. Решите неравенства:

а) $|x| \geq 2$; б) $0 < |x| \leq 3$; в) $|x-2| < 1$; г) $|x-a| < \delta$;

д) $|x-a| > \delta$; е) $0 < |x-a| < \delta$.

2.26. Решите уравнения:

а) $|x-1| = 2x-1$; б) $|x^2 - x - 6| = x+2$;

в) $||x-1|+2| = 1$; г) $||x+1|+2| = 2$.

2.27. Решите неравенства и дайте геометрическую иллюстрацию:

а) $|3x+1| > 2$; б) $|2-x| > 5$; в) $|x-3| \leq 1$; г) $\left| \frac{x-2}{2x+3} \right| < 1$;

д) $|3x^2 - 4x - 1| > 3$; е) $|x^2 - 3x - 4| > x^2 - 3x - 4$; ж) $\left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}$;

з) $|2x+y| > 1$; и) $|x-3y| > \frac{1}{2}$; к) $|3x-y| < 2$.

2.28. Постройте графики функций:

1) $y = -|x-2|$; 2) $y = |x| - x$;

3) $y = |-x^2 + 5x - 6|$; $y = x - 4 + |x-2|$ на $[-2; 5]$.

2.29. Выполните действия:

а) $\left(2\frac{3}{4} + 3\frac{1}{3}i \right) - \left(\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3}i \right)$;

б) $(2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}i) - (\sqrt{27} - \sqrt{32}i) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i \right)$.

2.30. Вычислите:

а) $(1+i)(1-i)$; б) $(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+\sqrt{6}i)$;

в) $(2+5i)^2(3-i)$; г) $(1+2i)^2(i-2)^2$.

2.31. Вычислите значения выражений:

а) $\frac{3+2i}{7-2i}$; б) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-3i}$; в) $\frac{3+i}{3-i} + \frac{3-i}{3+i}$; г) $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{1-i}$.

2.32. Найдите действительные числа x и y , такие, что

$$(2x - 3yi)(2x + 3yi) + xi = 97 + 2i.$$

2.33. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел

$$(1 + i)x + (2 + i)y = 3i + 1.$$

2.34. Вычислите частные:

а) $\frac{1 - 20\sqrt{5}i}{7 - 2\sqrt{5}i}$; б) $\frac{1 - i^2}{(1 + i)^3}$.

2.35. Геометрически найдите сумму и разность комплексных чисел:

а) $1 + 5i$ и $2 + 3i$; б) $7 - 2i$ и $5 - 3i$; в) $4 + 5i$ и $5 + 4i$; г) $1 - 3i$ и $1 + 3i$.

2.36. Возведите в степень: а) i^{24} ; б) i^{37} ; в) $(-i)^{10}$; г) $-i^{10}$.

2.37. Найдите множества точек z комплексной плоскости, заданные условиями:

а) $|z - 1| \leq 1$; б) $|z - c| < a$; в) $|z - c| = a$, где a — действительное, положительное число; c — комплексное число.

2.38. Найдите множества точек z комплексной плоскости, для которых:

а) $\arg z = 0$; б) $\arg z = \pi$; в) $\arg z = \frac{\pi}{2}$; г) $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

2.39. Решите уравнения: а) $z^2 + 25 = 0$; б) $z^2 - 2z + 5 = 0$; в) $z^2 + 4z + 13 = 0$ (в системе комплексных чисел) и проверьте подстановкой корней в уравнение.

2.40. Составьте квадратное уравнение по его корням: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$; $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

2.41. Следующие комплексные числа изобразите векторами, определите их модули и аргументы:

а) $z = 3$; б) $z = -2$; в) $z = 3i$; г) $z = -2i$; д) $z = 2 - 2i$; е) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

2.42. Какое множество точек z комплексной плоскости задает система условий:

$$\begin{cases} 1 \leq |z - i| \leq 3; \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} ? \end{cases}$$

Задания к главе 3. Предел и непрерывность

3.1. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n+2}} = \frac{1}{3}.$$

3.2. Изображая члены последовательностей на числовой оси, выясните, около какой точки происходит сгущение точек. Являются ли координаты точек, около которых происходит сгущение, пределами этих последовательностей?

$$\text{а) } 0, 1, 0, \frac{1}{2}, \dots, 0, \frac{1}{n}, \dots; \text{ б) } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots; \text{ в) } 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots.$$

3.3. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$. Укажите номер n , начиная с которого выполняется неравенство $\left| \frac{n^2+1}{n^2} - 1 \right| < \varepsilon$ при:

$$\text{а) } \varepsilon = 0,1; \text{ б) } \varepsilon = 0,01.$$

3.4. Докажите, что из сходимости последовательности (x_n) следует сходимость последовательности $(|x_n|)$, причем если $\lim_{n \rightarrow a} x_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow a} |x_n| = |a|$. Верно ли утверждение, обратное данному?

3.5. Докажите, что последовательность $(n + (-1)^n n)$ не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

3.6. Докажите, что последовательность $x_n = (-1)^n n^2$ является бесконечно большой, а $y_n = \frac{1}{x_n}$ — бесконечно малой.

В задачах 3.7—3.13 найдите предел.

$$\text{3.7. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2^n}{1+2^n}.$$

$$\text{3.8. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{2n}{3n+1} \right).$$

$$\text{3.9. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{n(n+4)+2}.$$

$$\text{3.10. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

$$\text{3.11. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}.$$

$$\text{3.12. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2-n+1}).$$

$$\text{3.13. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{3n^2}{n+1}}.$$

$$3.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

3.15. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x+1} \right) = 2$. Найдите такое $\delta > 0$, что при

$$|x| < \delta \text{ выполняется неравенство } \left| \frac{x+2}{x+1} - 2 \right| < \varepsilon \text{ для } \varepsilon = 0,01.$$

В задачах 3.16—3.25 найдите предел.

$$3.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}.$$

$$3.18. \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}.$$

$$3.19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}.$$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 - 1}}.$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$3.23. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x).$$

$$3.25. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

3.26. Покажите на рисунке несколько возможных вариантов поведения функции $f(x)$ вблизи точки $x = 0$, если $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = +\infty$.

3.27. Покажите на рисунке несколько возможных вариантов поведения функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

3.28. Покажите на рисунке несколько возможных вариантов поведения функции $f(x)$ вблизи точки $x = 1$, если известно, что $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = +\infty$.

3.29. Вычислите приращение функции $y = x^3$, задав приращение аргумента Δx .

3.30. Докажите непрерывность функции $y = x^2 + x$ в любой точке x , убедившись, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

3.31. Укажите точку разрыва функции $y = \frac{4}{x-2}$. Найдите $\lim_{x \rightarrow 2-0} y$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} y$ и постройте кривую по точкам $x = -2; 0; 1; 3; 4; 6$.

3.32. Постройте график функции $y = \frac{x+1}{|x+1|}$.

3.33. Постройте график функции $y = \begin{cases} 0,5x^2 & \text{при } |x| < 2; \\ 2,5 & \text{при } |x| = 2; \\ 3 & \text{при } |x| > 2 \end{cases}$ и ука-

жите ее точки разрыва.

3.34. Исследуйте на непрерывность $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0, 1]; \\ 3-x, & \text{если } x \in [1, 2]. \end{cases}$

3.35. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in (-\infty, 3]; \\ 2x+1, & \text{если } x \in (3, +\infty). \end{cases}$

3.36. Найдите точки разрыва и постройте график функции $y = 2 - \frac{|x|}{x}$.

3.37. Исследуйте поведение функции $y = \frac{x^3 + x}{2|x|}$ вблизи точки разрыва, изобразите эскиз графика.

3.38. Всегда ли произведение двух разрывных функций разрывно?

3.39. Докажите, что абсолютная величина непрерывной функции является непрерывной функцией.

3.40. Пусть задана функция $y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{если } x \neq 2; \\ A, & \text{если } x = 2. \end{cases}$ Как следует выбрать значение A , чтобы функция была непрерывной?

В задачах 3.41 — 3.46 найдите асимптоты графиков функций и изобразите эскиз асимптотического поведения функции.

$$3.41. y = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

$$3.42. y = \frac{x}{x^2-4x+3}.$$

$$3.43. y = \frac{x^3}{x^2+9}.$$

$$3.44. y = \sqrt{x^2-1}.$$

$$3.45. y = \frac{x^2}{x+1}.$$

3.46. Найдите кривую, характеризующую асимптотическое поведение функции $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 2}{x + 1}$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Задания к главе 4. Элементарные функции

4.1. Упростите выражение $\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$.

4.2. Выполните действия: $\frac{5a^n b^{n-1} c^{n-2}}{6x^{n+1} y^{n-2} z^{n+1}} : \frac{3a^{n-1} bc^{n+1}}{2xy^n z^{n+1}}$.

4.3. Выполните действия: $\frac{(x+y)^{-5}(x+y)^2}{(x+y)^{-2}(x+y)^{-1}}$.

В задачах 4.4—4.9 найдите область определения функции.

4.4. $y = 10^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}$.

4.5. $y = \ln|x-3|$.

4.6. $y = \ln(x-3)$.

4.7. $y = \log_2\left(\frac{2x}{x+1} - 1\right)$.

4.8. $y = \lg(2x - x^2 + 15)$.

4.9. $y = 10^{\lg(x+4)}$.

4.10. Вычислите:

а) $27^{\frac{1}{3} \log_3 \frac{1}{2} - \log_{27} 2}$; б) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 - \log_5 2 + 2 \log_{25} 3}$.

4.11. Определите знак выражения:

а) $\frac{\sin 205^\circ \cos 275^\circ}{\operatorname{tg} 200^\circ \operatorname{ctg} 105^\circ}$; б) $\frac{\sin 310^\circ \cos^2 170^\circ}{\operatorname{tg} 190^\circ \operatorname{ctg} 92^\circ}$.

4.12. Упростите выражение $1 - \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.

В задачах 4.13, 4.14 найдите область определения выражений и упростите их.

4.13. $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1}$.

4.14. $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

4.15. Докажите равенство $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$.

В задачах 4.16—4.19 вычислите значения выражений.

4.16. $\arcsin 0 + \arccos 0 + \operatorname{arctg} 0$.

4.17. $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$.

4.18. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin \frac{1}{2}$.

4.19. $\sin \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right)$.

4.20. Докажите, что равенство $\arcsin \frac{x}{2} + 2\arccos x = \pi$ верно только при $x = 0$.

4.21. Вычислите $\sin^2(3\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg}(-1))$.

4.22. Какие из функций четные, какие — нечетные:

а) $y = \frac{\sin x}{x}$; б) $y = x + \cos x$; в) $y = x^2 + \cos x$;

г) $y = \lg x$; д) $y = x + \sin x$?

4.23. Докажите, что функции $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ и $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$ четные.

4.24. Докажите, что функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ и $g(x) = 2^x - 2^{-x}$ нечетные.

4.25. Докажите периодичность и укажите основные периоды функций:

а) $f(x) = c$ ($c = \text{const}$, $c \neq 0$); б) $f(x) = |\sin x|$; в) $f(x) = \sin(6x - 2)$;
г) $f(x) = 3\cos x$.

4.26. Докажите, что следующие функции ограничены в области определения:

а) $y = \cos x$; б) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; в) $y = e^{-x^2}$.

4.27. Докажите, что следующие функции не ограничены в области определения:

а) $y = x^3$; б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \frac{x}{x-2}$.

4.28. Исследуйте на монотонность следующие функции:

а) $y = x^4 - 2x^2 - 3$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{x+2}$; в) $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

4.29. Найдите сложную функцию $f(\varphi(t))$:

а) $f(x) = \lg x^2$, $\varphi(t) = \cos t$;

б) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$;

в) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $\varphi(t) = f(t)$;

г) $f(x) = \sqrt{4-2^x}$, $\varphi(t) = t^2 - 3t + 2$.

В задачах 4.30—4.46 постройте график, используя простейшие свойства элементарных функций.

$$4.30. y = \frac{x+1}{x+2}.$$

$$4.31. y = \sqrt{x+1}.$$

$$4.32. y = \sqrt[3]{x-1}.$$

$$4.33. y = \sqrt{(x+1)^3}.$$

$$4.34. y = \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

$$4.35. y = 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$4.36. y = 0,5 \log_2 x^2.$$

$$4.37. y = 9^{\log_3 x}.$$

$$4.38. y = \ln \sin x.$$

$$4.39. y = 2^{\lfloor \log_{0.5} x \rfloor}.$$

$$4.40. y = \sin 2x.$$

$$4.41. y = \cos \frac{x}{3}.$$

$$4.42. y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}.$$

$$4.43. y = \sin x + |\sin x|.$$

$$4.44. y = |\sin |x||.$$

$$4.45. y = \sin 2 \arctg x.$$

$$4.46. y = \arcsin(\sin x).$$

В задачах 4.47—4.52 докажите тождества.

$$4.47. \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} = \sqrt{1 + \frac{a}{2}} - \sqrt{1 - \frac{a}{2}} \text{ при } 0 \leq a \leq 2.$$

$$4.48. \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$4.49. \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \cos \alpha \cos \beta.$$

$$4.50. \left(\sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)^2 + \left(\cos \alpha - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)^2 = 2.$$

$$4.51. 2 \sin 2\alpha \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 4\alpha.$$

$$4.52. \frac{1}{2}(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right).$$

В задачах 4.53—4.72 решите уравнения.

$$4.53. \sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}.$$

$$4.54. \frac{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x-1}} = 2.$$

$$4.55. 1+x = \sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}}.$$

$$4.56. \sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2+21} = 8.$$

$$4.57. \sqrt{3-x} - 2x + 3 = 0.$$

$$4.58. \left(\frac{1}{64}\right)^x = \frac{1}{8}.$$

$$4.59. 100^x = 0,1(10^{x-1})^5.$$

$$4.60. 3^{2x+1} - 3^{2x-1} + 3^{2x-2} = 225.$$

$$4.61. \sqrt{2} = 4^{x^2 - \sqrt{x^2-9} - 20,75}.$$

$$4.62. 25^{(1-2x)} = 5^{(4-6x)}.$$

$$4.63. \lg(x^2-17) = \lg(2x-2).$$

$$4.64. \log_3 x - \log_9 x + \log_{81} x = \frac{3}{4}.$$

$$4.65. 3\sqrt{\log_3 x} - \log_3(3x)$$

$$4.66. \log_3(3x-8) = 2-x.$$

$$4.67. \sin 3x + \sin x = 0.$$

$$4.68. \frac{1}{\cos^2 x} - 4 = 0.$$

$$4.69. \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

$$4.70. 1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}.$$

$$4.71. \cos 4x \cos 5x = \cos 6x \cos 7x.$$

$$4.72. \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -9 \operatorname{ctg}^2 x - 1.$$

$$4.73. \sqrt{\cos 2x + \sin 3x} = \sqrt{2} \cos x.$$

$$4.74. \arccos x = \arctg x.$$

В задачах 4.75—4.77 решите системы уравнений.

$$4.75. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}; \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$$4.76. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3; \\ xy = 4. \end{cases}$$

$$4.77. \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

В задачах 4.78—4.81 решите неравенства.

4.78. $2^{x^2-4x+2} > 2^{4x-13}$.

4.79. $7^{1-3x^3-5x} + 7^{-3x^2-5x} < 8 \cdot 7^{6(x+1)}$.

4.80. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3) > \log_{\frac{1}{2}}(13 - x)$.

4.81. $\log_{4x^2}(5x + 6) > 1$.

Задания к главе 5. Элементы линейной алгебры

5.1. Укажите на координатной плоскости точки с координатами $A_1(1, 1)$, $A_2(-1, 1)$, $A_3(1, -1)$, $A_4(-1, -1)$.

5.2. Найдите координаты вершин квадрата с центром в точке $O(0, 0)$, если одна из вершин имеет координаты $B_1(-1, 0)$.

5.3. Укажите полярные координаты r и φ вершин квадрата из задачи 5.2.

5.4. Найдите полярные координаты точки $A(2, 2)$.

5.5. Найдите прямоугольные декартовы координаты точки A , если ее полярные координаты $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

5.6. Найдите координаты вершин куба с центром в точке $O(0, 0, 0)$, если одна из вершин имеет координаты $C_1(1, 1, 1)$.

5.7. Изобразите на рисунке многогранник с вершинами $C_1(1, 0, 0)$, $C_2(0, 1, 0)$, $C_3(0, 0, 1)$, $C_4(-1, 0, 0)$, $C_5(0, -1, 0)$, $C_6(0, 0, -1)$.

5.8. Найдите расстояние между точками $A_1(1, 1)$ и $A_2(-1, 1)$.

5.9. Определите длины сторон треугольника с вершинами в точках $A(3, 4)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 1)$.

5.10. Найдите длину отрезка $|AB|$, если полярные координаты точек таковы: $A\left(1; -\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2; \frac{3\pi}{4}\right)$.

5.11. Найдите длину отрезка $|AB|$, если полярные координаты точек таковы: $A\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(1; -\frac{\pi}{6}\right)$.

5.12. Определите расстояние между точками $A_1(1, 0, 2)$ и $A_2(0, -1, 3)$.

5.13. Найдите площадь треугольника с вершинами $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$.

5.14. Точка $A(3, 1)$ при параллельном сдвиге осей координат получила новые координаты $(2, -1)$. Постройте данные и смещенные оси координат и точку A .

5.15. Перенесением начала координат упростите уравнение $\frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$. Постройте старые и новые оси координат и эскиз множества точек, удовлетворяющих уравнению.

5.16. Поворотом осей координат на $\frac{\pi}{4}$ упростите уравнение $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$. Постройте старые и новые оси координат и эскиз соответствующей линии.

5.17. Используя преобразование координат, постройте параболы: а) $y = (x-2)^2$; б) $y = (x+2)^2 - 3$.

5.18. Используя метод выделения полного квадрата, постройте параболы: а) $y = x^2 - 4x + 5$; б) $y = x^2 + 2x + 3$.

5.19. Изобразите на одном чертеже графики парабол $y = ax^2$ для $a = -2$; -1 ; 1 ; 2 .

5.20. Изобразите графики функций $y = \sin kx$: а) при $k = \frac{1}{2}$; б) при $k = 2$.

5.21. Изобразите графики функций $y = A \cos x$: а) при $A = -1$; б) при $A = 2$; в) при $A = -3$.

5.22. Используя преобразования координат, изобразите графики функций:

а) $y = 3 \sin 2x$; б) $y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = 2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

5.23. Проверьте аналитически и геометрически векторное равенство $\vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

5.24. На плоскости даны точки $A(0, -2)$, $B(4, 2)$, $C(4, -2)$. В начале координат приложены силы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$. Постройте их равнодействующую $\vec{OM}$, найдите ее проекции на оси координат и величину. Выразите силы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OM}$ через единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей.

5.25. Даны точки $A(1; 4)$, $B(5; 5)$, $C(6; 2)$, $D(2; 1)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Вычислите длины векторов $\vec{DB}$ и $\vec{AC}$.

5.26. Даны две точки $A(-3; 1; -1)$ и $B(2; -4; 1)$. Выразите через орты вектор $\vec{AB}$ и вычислите его длину.

5.27. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Найдите $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

5.28. Даны точки $A(2, 1, 0)$, $B(5, -1, 6)$, $C(0, 2, 0)$.

а) Найдите векторы $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$.

б) Определите координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

в) Определите расстояние между точками A и B .

5.29. Постройте точку $M(5; -3; 4)$, определите длину и направление ее радиуса-вектора.

5.30. Постройте параллелограмм на векторах $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ и определите его диагонали.

5.31. Найдите угол между векторами $\vec{a}(1; 0)$, $\vec{c}(1; -1)$.

5.32. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$, если даны координаты точек $A(1; 3)$, $B(2; 0)$, $C(3; 4)$.

5.33. Определите, при каких значениях m векторы $\vec{a}(m; 2)$ и $\vec{b}(2; m-6)$ будут взаимно перпендикулярны.

5.34. При каком значении m векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + m\vec{k}$ ортогональны?

5.35. Определите работу, которая производится силой $\vec{F} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ при прямолинейном перемещении под ее действием точки из положения $M_1(3, -2, -3)$ в положение $M_2(5, -7, -10)$.

5.36. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

5.37. Найдите угол между вектором $\vec{m}(1; 0; \sqrt{3})$ и осью аппликата.

5.38. Вычислите векторное произведение $\left[3\vec{m}; \left(\frac{1}{2}\vec{n} - \vec{m} \right) \right]$, если $\vec{m}(2; 1; 0)$, $\vec{n}(4; 2; 2)$.

5.39. Вычислите модуль векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\arcsin 0,8$.

5.40. Найдите площадь треугольника, координаты вершин которого $A(6; 2; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(8; 0; 0)$.

5.41. Докажите, что $[(\vec{a} - \vec{b}); (\vec{a} + \vec{b})] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$, и выясните геометрический смысл данного тождества.

5.42. Найдите сумму $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$.

5.43. Докажите, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк пропорциональна другой. То же самое — для столбцов.

5.44. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

5.45. Вычислите определитель, разложив его по элементам первой

строки:
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

5.46. Убедитесь, что
$$\begin{vmatrix} 6 & 14 & 28 \\ -7 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$
, не «раскрывая» определитель.

5.47. Вычислите определитель
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5.48. Вычислите определитель
$$\begin{vmatrix} 1 + \cos x & 1 + \sin x & 1 \\ 1 - \sin x & 1 + \cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
.

5.49. Убедитесь, что векторы $\vec{a}(-1; 2; 0)$, $[\vec{k}, \vec{i}]$ и $[\vec{j}, \vec{k}]$ компланарны.

5.50. Решите с помощью определителей системы:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 7; \\ 4x - 5y = 40; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x - 5y = 7; \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

5.51. Решите с помощью определителей системы:

а) $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0; \\ x + 5y - 4z + 5 = 0; \\ 4x + y - 3z + 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 5; \\ 3x - 5y - z = 1; \\ z - y = 29. \end{cases}$

5.52. Решите систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 5; \\ x - y + z = 1; \\ x + z = 2. \end{cases}$$

Задания к главе 6. Элементы аналитической геометрии

6.1. Постройте график прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 3$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° ; б) 135° . Напишите уравнения этих прямых.

6.2. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол:

а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

6.3. Постройте график прямой:

а) $3x + 4y = 12$; б) $3x - 4y = 0$; в) $2x - 5 = 0$.

6.4. Даны точки $O(0, 0)$ и $A(-3, 0)$. На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0, 2)$. Напишите уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

6.5. Определите, как расположены точки $A(3, 5)$, $B(2, 7)$, $C(-1, -3)$, $D(-2, -6)$ по отношению к прямой $y = 2x - 1$. (Лежат на ней? Расположены выше или ниже?)

6.6. Точка $M(x, y)$ движется так, что разность квадратов расстояний от нее до точек $A(-a, a)$ и $B(a, -a)$ остается равной $4a^2$. Напишите уравнение ее траектории.

6.7. Равнобедренная трапеция с основаниями 8 и 2 см имеет острый угол $\frac{\pi}{4}$. Напишите уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание, а за ось Oy — ось симметрии трапеции.

6.8. Определите угол между прямыми:

а) $\begin{cases} y = 2x - 3; \\ y = \frac{1}{2}x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - y + 7 = 0; \\ 2x - 3y + 1 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + y = 0; \\ y = 3x - 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x + 2y = 0; \\ 6x + 4y + 9 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x - 4y = 6; \\ 8x + 6y = 11. \end{cases}$

6.9. В точках пересечения прямой $2x - 5y - 10 = 0$ с осями координат восстановлены перпендикуляры к этой прямой. Напишите их уравнения.

6.10. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 3)$, $B(4, -2)$.

6.11. Определите вершины и углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 3y = 0$; $x = 3$; $x - 2y + 3 = 0$.

6.12. Постройте плоскости:

а) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$; б) $3x + 2y - z = 0$;
в) $3x + 2z = 6$; г) $2z - 7 = 0$.

6.13. Постройте плоскость $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ и найдите углы нормали к плоскости с осями координат.

6.14. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(a, a, 0)$ и перпендикулярной к вектору $\overrightarrow{OM}$. Постройте плоскость.

6.15. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(0, -2, 3)$. Постройте плоскость.

6.16. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -1, 3)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

6.17. Постройте плоскость $2x - 2y + z - 6 = 0$ и найдите углы ее нормали с осями координат.

6.18. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(2, 2, 0)$, $M_2(4, 0, 0)$.

6.19. Найдите угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$.

6.20. Найдите плоскость, проходящую через точку $M(2, 2, -2)$ и параллельную плоскости $x - 2y - 3z = 0$.

6.21. Запишите уравнение прямой, образованной пересечением плоскостей $x + 2y + 3z - 13 = 0$ и $3x + y + 4z - 14 = 0$, в канонической форме.

6.22. Постройте прямые:

а) $\begin{cases} y=3; \\ z=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=2; \\ z=x+1 \end{cases}$ и определите их направляющие векторы.

6.23. Найдите угол между прямой $x = 2z - 1$; $y = -2z + 1$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $A(1, -1, -1)$.

6.24. Покажите, что прямая $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ перпендикулярна прямой $x = z + 1$; $y = 1 - z$.

6.25. Найдите угол между прямыми

$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0; \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0; \\ z = 3x. \end{cases}$

6.26. Найдите угол между прямой $\begin{cases} y = 3x - 1; \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ и плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

6.27. Напишите уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

6.28. Вычислите площадь треугольника с вершинами $A(2, 0)$, $B(5, 3)$, $C(2, 6)$.

6.29. Покажите, что точки $A(1, 1)$, $B(-1, 7)$ и $C(0, 4)$ лежат на одной прямой.

6.30. Вычислите площадь четырехугольника с вершинами $A(3, 1)$, $B(4, 6)$, $C(6, 3)$, $D(5, -2)$.

6.31. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4, -2, 1)$, $B(2, 4, -3)$, $O(0, 0, 0)$.

6.32. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x + 2y + z = 0$, $2x - y + 3z - 3 = 0$, $4x + 5y - 2z - 12 = 0$ и через точки $M(0, 3, 0)$, $N(1, 1, 1)$.

6.33. Найдите площадь наибольшей (по площади) грани у тетраэдра с вершинами $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 4, 0)$, $C(1, 2, 1)$, $D(3, 0, 0)$.

6.34. Напишите уравнение окружности с центром $C(-4, 3)$ и радиусом $R = 5$ и постройте ее. Лежат ли на этой окружности точки $A(-1, 1)$, $B(3, 2)$, $O(0, 0)$?

6.35. Напишите уравнение окружности, касающейся оси координат и проходящей через точку $A(1, 2)$.

6.36. Даны точки $A(-3, 0)$ и $B(3, 6)$. Напишите уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB .

6.37. Постройте линию $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$, преобразовав уравнение к каноническому виду.

6.38. Определите вид линии $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$ и изобразите ее.

6.39. Какое множество точек с координатами (x, y) удовлетворяет уравнению $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$?

6.40. Укажите множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$.

6.41. Постройте кривую $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

6.42. Какая линия задается уравнением $x^2 - 6x + 8 = 0$?

6.43. Какое множество точек задается уравнением $x^2 + 2x + 5 = 0$?

6.44. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $O(0, 0)$, $A(-1, -3)$ и $B(-2, -4)$. Напишите уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок оси Ox , отсеченный параболой.

6.45. Найдите центр и радиус сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$.

6.46. Изобразите поверхность $z = (x + 2)^2 + (y - 2)^2$.

6.47. Изобразите поверхность $z = x \cdot y$.

6.48. Напишите уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z = x^2$, $y = 0$:

а) вокруг оси Oz ; б) вокруг оси Ox .

Изобразите эти поверхности.

6.49. Напишите уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oz .

6.50. Постройте поверхность $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ (однополостный гиперболоид).

6.51. Определите тип следующих поверхностей и постройте их:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$; б) $x^2 + y^2 = 2az$; в) $x^2 - y^2 = z^2$; г) $x^2 = 2az$; д) $z = 2 + x^2 + y^2$.

Задания к главе 7. Производная и ее приложения

7.1. Найдите производные следующих функций (по определению):

а) $y = x^4$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; д) $y = \frac{1}{x^2}$.

7.2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$. Вычислите $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$.

7.3. Вычислите $0,01f'(0,01)$, если $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$.

7.4. Зависимость температуры T тела от времени t задана уравнением $T = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 10$ с?

7.5. Два тела движутся прямолинейно: одно по закону $S = t^3 + t^2 - 27t$, другое по закону $S = t^2 + 1$. Определите момент, когда скорости этих тел окажутся равными.

7.6. Найдите производные от функций:

а) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$; б) $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$; в) $y = \frac{x}{1-4x}$; г) $y = \frac{\lg x}{x}$;
д) $y = x + \operatorname{ctg} x$; е) $y = x^2 \sin x$; ж) $y = \lg(5x)$; з) $y = a^{\sin x}$; и) $y = e^x(\sin x + \cos x)$;
к) $y = x - \operatorname{arctg} x$; л) $y = \arcsin \sqrt{x}$; м) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$.

7.7. Продифференцируйте функции:

а) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$; б) $y = x \cdot 2^{3x+x^2}$; в) $y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$;

г) $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x + \ln \cos x$; д) $y = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

е) $y = \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; ж) $y = \arcsin(e^{3x})$.

7.8. Вычислите производную:

а) $y = (x+1)^{100}$;

б) $y = (x + \sqrt[3]{x}) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$;

в) $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}}$;

г) $y = x^2 + 2^x$;

д) $y = \cos x^3$;

$$\text{е) } y = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\text{ж) } y = x^{\log_2 x};$$

$$\text{з) } y = \sin^2(\cos^3 x).$$

7.9. Пусть $f(y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{a} - \ln \sqrt[4]{y^4 - a^4}$; найдите $f'(2a)$.

7.10. Пусть $F(z) = \frac{\cos^2 z}{1 + \sin^2 z}$. Покажите, что $F\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$.

7.11. Найдите все значения x , при каждом из которых производная функции $y = 1 + 4 \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$ равна $10\sqrt{3}$.

7.12. Найдите все значения x , при каждом из которых производные следующих функций равны нулю:

$$\text{а) } y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2} \cos x;$$

$$\text{б) } y = 5x + \sin 2x - 4\sqrt{3} \sin x.$$

7.13. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5$ образует угол 135° с осью Ox .

7.14. К параболе $y = 4x - x^2$ в точке на ней с абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью Oy .

7.15. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y = \frac{3x+1}{2x-1}$; первая в точке на графике с абсциссой $x = -1$, а вторая в точке с абсциссой $x = 3$.

7.16. Напишите уравнение касательной к кривой $y = \frac{x^3}{3}$ в точке $x = -1$.

7.17. Напишите уравнения касательных к кривой $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox .

7.18. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 4x$ параллельна оси Ox ?

7.19. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна биссектрисе первого координатного угла?

7.20. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 4x^2 + 8x + 6$ в точке $(2, 14)$.

7.21. Дана функция $y = 2x^2 - 3x + 3$. Вычислите приращение функции и дифференциал функции при переходе аргумента от значения $x_1 = 1$ к значению $x_2 = 1,001$.

7.22. Сторона куба $x = (5 \pm 0,01)$ м. Определите абсолютную и относительную погрешности при вычислении объема куба.

7.23. Найдите дифференциалы функций:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; б) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; в) $x = R \cos^2 t$.

7.24. Найдите:

а) $d((x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1))$; б) $d\left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x}\right)$; в) $d\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)$;

г) $d(\ln \sin^3 5x)$.

7.25. Найдите производные второго порядка от функций:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \sqrt{1 + x^2}$.

7.26. Найдите производные третьего порядка от функций:

а) $y = x \ln x$; б) $s = te^{-t}$; в) $y = x \sin x$;

г) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$; д) $y = \frac{t}{2} \sqrt{2 - t^2} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}}$.

7.27. Найдите производные n -го порядка от функций:

а) $y = e^{-\frac{x}{a}}$; б) $y = \ln x$; в) $y = x^n$; г) $y = \sin x$.

7.28. Найдите относительную погрешность, допускаемую при вычислении стороны квадрата, если его площадь $68,5 \text{ см}^2$ измерена с погрешностью $0,05$.

7.29. Вычислите приближенные значения функций:

а) $y = x^3$ при $x = 10,03$; б) $y = \sqrt{x}$ при $x = 24,99$.

7.30. Найдите приближенные значения:

а) $\sqrt[3]{0,95}$; б) $(1,01)^7$.

7.31. Напишите первые четыре члена разложения в окрестности точки $x_0 = 1$ формулы Тейлора функции $y = \ln x$.

7.32. Исследуйте функции на монотонность:

а) $y = x^5 - 5x$; б) $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$; в) $y = \frac{e^x}{x}$; г) $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$;

д) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

7.33. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ на отрезке $[-5; 4]$.

7.34. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$y = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}$.

7.35. Найдите все значения x , для каждого из которых функция $y = 6 \cos 2x + 6 \sin x - 2$ принимает наибольшее значение.

7.36. Исследуйте функции на выпуклость и вогнутость:

а) $y = (x - 1)^4 \cdot (3x + 7)$; б) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$; в) $y = x - \ln x$.

7.37. Исследуйте на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; б) $y = x^4 - 6x^2 + 5$; в) $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

7.38. Определите размеры открытого бассейна объемом 32 м^3 с квадратным дном так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

7.39. Даны точки $A(0, 3)$ и $B(4, 5)$. На оси Ox найдите точку M так, чтобы расстояние $S = AM + MB$ было наименьшим.

7.40. Найдите высоту и радиус основания прямого кругового цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиусом R .

7.41. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд 5 кг , а во второй — 20 кг . При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. Известно, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов?

7.42. Укажите первые пять членов ряда по формуле общего члена:

а) $a_n = \frac{2n+3}{n^2+1}$; б) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{3^{n-1}}$.

7.43. Запишите формулу общего члена ряда:

а) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots$

б) $\frac{2}{5} - \frac{4}{8} + \frac{6}{11} - \frac{8}{14} + \dots$

7.44. Используя формулу суммы членов бесконечной геометрической прогрессии, найдите сумму ряда:

а) $1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + \dots$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

в) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots$

7.45. Пользуясь определением сходящегося ряда, найдите частичную сумму s_n и сумму s ряда:

а) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$

б) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^3} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$

7.46. С помощью необходимого признака установите, какие из рядов расходятся:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{0,001}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$.

В задачах 7.47—7.50 установите сходимость или расходимость рядов с помощью признака сравнения.

$$7.47. \frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$$

$$7.48. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$7.49. \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{4n-2} + \dots$$

$$7.50. \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{8} + \frac{\sin^2 3\alpha}{27} + \dots + \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} + \dots$$

В задачах 7.51—7.56 исследуйте сходимость ряда с помощью признака Даламбера.

$$7.51. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots$$

$$7.52. 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$$

$$7.53. \frac{1 \cdot 2}{7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{7^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{7^3} + \dots$$

$$7.54. \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots$$

$$7.55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n} 2^n}$$

$$7.56. 2 + 1 + \frac{8}{9} + \dots + \frac{2^n}{n^2} + \dots$$

В задачах 7.57—7.63 исследуйте ряды на сходимость.

$$7.57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^3}$$

$$7.58. 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \dots + \frac{n^2}{n!} + \dots$$

$$7.59. \sin 1 + \sin \frac{1}{4} + \sin \frac{1}{9} + \sin \frac{1}{16} + \dots$$

$$7.60. \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{19} + \dots + \frac{n^2}{2n^2+1} + \dots$$

$$7.61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n 2^n}$$

$$7.62. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n}{n^n}$$

$$7.63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$$

7.64. Определите область сходимости функционального ряда:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots$$

7.65. Найдите радиус сходимости и укажите область сходимости степенного ряда:

а) $1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \dots$;

б) $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$;

в) $(x-4) - \frac{(x-4)^3}{3} + \frac{(x-4)^5}{5} - \dots$.

7.66. Разложите в степенной ряд функции:

а) $y = xe^x$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = \cos^2 x$.

Укажите области сходимости рядов.

7.67. Пользуясь рядами, вычислите приближенно с указанной точностью ε значения:

а) $\cos 18^\circ$ ($\varepsilon = 0,0001$); б) $\sin 27^\circ$ ($\varepsilon = 0,001$).

7.68. Пользуясь разложением в ряд функции $\operatorname{arctg} x$, подсчитайте приближенное значение π , взяв последовательно два, три и четыре члена разложения. Сравните точность полученных результатов с приближенным значением $\pi \approx 3,14159$.

Задания к главе 8. Интеграл и его приложения

8.1. Для указанных функций найдите первообразные и проверьте дифференцированием:

а) $f(x) = 4x^3$; б) $f(x) = 3 \cdot 2^{3x} \ln 2$; в) $f(x) = -2 \cos 2x$; г) $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$;

д) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

В задачах 8.2—8.14 найдите интегралы.

8.2. $\int x\sqrt{x} dx$.

8.3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

8.4. $\int (2 \sin x + 3 \cos x) dx$.

8.5. $\int x^8 dx$.

8.6. $\int \frac{2}{x^3} dx$.

8.7. $\int (2x^2 + 6x - 7) dx$.

8.8. $\int (2\sqrt[3]{x} - \sqrt{5x} + 1) dx$.

8.9. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$.

8.10. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$.

$$8.11. \int 2^x 3^x dx.$$

$$8.12. \int \left(3 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$$

$$8.13. \int (a + bx)^2 dx.$$

$$8.14. \int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^3} \right) dx.$$

В задачах 8.15—8.28 используйте метод подстановки.

$$8.15. \int \frac{x dx}{x^2 - 1}.$$

$$8.16. \int \frac{dx}{4x^2 + 1}.$$

$$8.17. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$$

$$8.18. \int (3x - 5)^{30} dx.$$

$$8.19. \int x e^{x^2} dx.$$

$$8.20. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$8.21. \int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$$

$$8.22. \int x \sqrt{a + x^2} dx.$$

$$8.23. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$8.24. \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$8.25. \int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$8.26. \int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx.$$

$$8.27. \int \frac{dx}{x \sqrt{2x - 9}}.$$

$$8.28. \int \frac{5x + 3}{\sqrt{3 - x^2}} dx.$$

В задачах 8.29—8.32 проинтегрируйте рациональные функции.

$$8.29. \int \frac{dx}{(x - 1)^4}.$$

$$8.30. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18}.$$

$$8.31. \int \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 7} dx.$$

$$8.32. \int \frac{5x-3}{x^2+10x+29} dx.$$

В задачах 8.33—8.36 используйте метод неопределенных коэффициентов.

$$8.33. \int \frac{x+2}{x(x-3)} dx.$$

$$8.34. \int \frac{dx}{x^3-x}.$$

$$8.35. \int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

$$8.36. \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx.$$

В задачах 8.37—8.40 примените метод интегрирования по частям.

$$8.37. \int \ln x dx.$$

$$8.38. \int x \arctg x dx.$$

$$8.39. \int x e^x dx.$$

$$8.40. \int x \cos 3x dx.$$

В задачах 8.41—8.46 вычислите интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции.

$$8.41. \int \cos 5x \cos x dx.$$

$$8.42. \int \sin^3 x dx.$$

$$8.43. \int \cos^2 3x dx.$$

$$8.44. \int \sin^4 x dx.$$

$$8.45. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5}.$$

$$8.46. \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$$

8.47. Вычислите интегральную сумму для интеграла $\int_0^1 x dx$, разбив отрезок $[0, 1]$ на 10 частей. Сравните ее с точным значением интеграла.

8.48. Оцените интегралы:

$$а) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} dx; б) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

В задачах 8.49 — 8.57 вычислите определенные интегралы.

$$8.49. \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx.$$

$$8.50. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx.$$

$$8.51. \int_{-2}^3 (2x^3 - x^2 - 5) dx.$$

$$8.52. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$8.53. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$8.54. \int_2^3 \frac{x dx}{x^2 + 1}.$$

$$8.55. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 \cos x \right) dx.$$

$$8.56. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} dx.$$

$$8.57. \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx.$$

В задачах 8.58—8.64 вычислите площади фигур, ограниченных заданными линиями.

$$8.58. y = -x^2; x + y + 2 = 0.$$

$$8.59. y = \frac{16}{x^2}; y = 17 - x^2 \ (x > 0, y > 0).$$

$$8.60. y = \sin x; y = \cos x; x = 0.$$

$$8.61. y = 4 - x^2; y = 0.$$

$$8.62. y = e^x; y = e^{-x}; y = 4.$$

$$8.63. y = -\frac{3}{2}x^2 + 9x - \frac{15}{2}; y = -x^2 + 6x - 5.$$

$$8.64. y = 2 \sin x; y = \operatorname{tg} x.$$

В задачах 8.65, 8.66 вычислите длину дуги кривой.

$$8.65. y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3} \text{ (между точками пересечения с осью } Ox).$$

$$8.66. y = \ln \sin x \text{ (от } x = \frac{\pi}{3} \text{ до } x = \frac{\pi}{2}).$$

8.67. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = x^3$ от точки $x = 0$ до точки $x = \frac{1}{2}$.

В задачах 8.68—8.70 найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями.

8.68. $xy = -2$; $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$ (вокруг оси Ox).

8.69. $x = y^2$; $x = 1$; $y = 0$ (вокруг осей Ox и Oy).

8.70. $y = \sin x$; $y = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ (вокруг оси Ox).

В задачах 8.71, 8.72 найдите среднее значение функции на заданном отрезке.

8.71. $y = \operatorname{tg} x$; $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

8.72. $y = \frac{1}{1+x^2}$; $[-1, 1]$.

8.73. Скорость точки меняется по закону $v = 100 + 8t$ м/с. Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени от $t = 0$ до $t = 10$?

8.74. Найдите массу стержня длиной 100 см, если линейная плотность меняется по закону $\delta = 20x + 0,15x^2$ г/см, где x — расстояние от одного из концов стержня.

8.75. Точка движется по оси Ox , начиная от точки $M(1, 0)$ так, что скорость ее равна абсциссе. Где она будет через 10 с от начала движения?

8.76. Определите давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз основанием 8 м и высотой 6 м.

8.77. Вычислите работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз; радиус основания сосуда $R = 3$ м и высота $H = 8$ м.

Задания к главе 9. Дифференциальные уравнения

9.1. Проверьте подстановкой, что функция $y = Cx^3$ является решением дифференциального уравнения $3y - xy' = 0$. Постройте интегральные кривые, проходящие через точки: а) $\left(1, \frac{1}{3}\right)$; б) $(1, 1)$.

9.2. Проверьте подстановкой, что дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 0$ имеет общее решение $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

9.3. Постройте семейство парабол $y = Cx^2$ при $C = 0; \pm 1, \pm 2$ и составьте дифференциальное уравнение, для которого это семейство является общим решением.

9.4. Изобразите поле направлений в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$ в узлах разбиения его на 64 квадрата для дифференциального урав-

нения $y' = x^2 + y^2$. Изобразите приближенно его частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y = 0$ при $x = 0$.

9.5. Изобразите поле направлений для уравнения $y' = \frac{y}{x}$ в окрестности точки $(1, 1)$.

9.6. Проверьте, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ является общим решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$. Найдите его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$.

9.7. Проверьте, что общим интегралом дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ будет $x^2 + y^2 = c$. Постройте семейство интегральных кривых и выделите те из них, что проходят через точки $A(1, 1)$, $B(3, -4)$.

9.8. Убедитесь, что функция $u = x^2 - y^2$ является решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

В задачах 9.9—9.14 найдите общие решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

9.9. $y' = 6x^3$.

9.10. $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$.

9.11. $y' = 3^{x+y}$.

9.12. $dy - 2\sqrt{y}dx = 0$.

9.13. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

9.14. $\operatorname{tg} x dy - (1+y)dx = 0$.

В задачах 9.15—9.17 проинтегрируйте дифференциальные уравнения и постройте интегральные кривые, проходящие через заданные точки.

9.15. $ydx + xdy = 0$; $A(-2, -4)$.

9.16. $x^2y' + y^2 = 0$; $A(1, -1)$.

9.17. $y' = \sqrt[3]{y^2}$; $A(0, 1)$.

В задачах 9.18—9.22 найдите частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

9.18. $\frac{y}{y'} = \ln y$ при $x = 2$, $y = 1$.

9.19. $2y'\sqrt{x} = y$ при $x = 4$, $y = 1$.

9.20. $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

9.21. $y \ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$ при $x = -\frac{15}{16}$, $y = e$.

9.22. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при $x = 1, y = 0$.

9.23. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $(0, 2)$, тангенс угла наклона которой во всякой точке равен $\frac{1}{3y^2}$.

9.24. Тело движется со скоростью, которая в каждый момент времени t определяется по формуле $v = 5t^2 - 2$ м/с. Найдите закон движения тела и путь, пройденный телом за 3 с от начала движения.

9.25. Определите кривую, проходящую через точку $A(-1, 1)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

9.26. Найдите закон движения и скорость движущегося тела, если скорость его возрастает пропорционально пройденному пути и если в начальный момент движения тело находилось в 8 м от начала отсчета пути и имело скорость 24 м/с.

9.27. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый данный момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость равна A_0 . Какова будет стоимость оборудования по истечении t лет?

9.28. Известно, что скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. За какое время нагретое до 100° тело охладится до температуры 20° , если до 60° оно охлаждается за 10 мин?

9.29. Убедитесь, что с помощью замены $u = \frac{y}{x}$ уравнение $xy' \cdot \ln \frac{y}{x} = x + y \cdot \ln \frac{y}{x}$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

9.30. Убедитесь, что заменой $u = \frac{x}{y}$ уравнение

$$3y \cdot \sin \frac{3x}{y} dx + \left(y - 3x \cdot \sin \frac{3x}{y} \right) dy = 0$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

9.31. Запишите дифференциальное уравнение, позволяющее найти кривую, у которой произведение абсциссы любой точки, принадлежащей кривой, на отрезок, отсекаемый нормалью на оси Ox , равно удвоенному квадрату расстояния этой точки от начала координат.

В задачах 9.32—9.37 найдите общие решения линейных дифференциальных уравнений.

9.32. $y' - \frac{3y}{x} = x$.

$$9.33. \quad xy' - y = x^2 \cos x.$$

$$9.34. \quad y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}.$$

$$9.35. \quad y' \cos x - y \sin x = \sin 2x.$$

$$9.36. \quad e^x(y + y') = 1.$$

$$9.37. \quad x^2 y' + 2xy = \ln x.$$

В задачах 9.38—9.41 найдите частные решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

$$9.38. \quad y' \sin x - y \cos x = 1 \text{ при } x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$$

$$9.39. \quad y' - \frac{y}{x} = 3x \text{ при } x = 1, y = 3.$$

$$9.40. \quad t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3 \text{ при } t = -1, s = 1.$$

$$9.41. \quad y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x \text{ при } x = e, y = \frac{1}{2}e^2.$$

$$9.42. \quad \text{Проинтегрируйте уравнение } y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x.$$

$$9.43. \quad \text{Решите задачу Коши для уравнения } y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ если при}$$

$$x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\ln 2}{2}, y' = 1.$$

В задачах 9.44—9.52 решите дифференциальные уравнения.

$$9.44. \quad y'' - 4y' + 4y = 0.$$

$$9.45. \quad y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$9.46. \quad y'' - 4y' + 13y = 0.$$

$$9.47. \quad y'' + 5y' + 6y = 0. \text{ Начальные условия: } y(0) = 1, y'(0) = -6.$$

$$9.48. \quad y'' - 10y' + 25y = 0. \text{ Начальные условия: } y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$9.49. \quad 9y'' + y = 0. \text{ Начальные условия: } y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2, y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

$$9.50. \quad y'' - 4y = 8x^3.$$

$$9.51. \quad y'' - 2y' + 2y = x^2.$$

$$9.52. \quad y'' - y' - 2y = x. \text{ Начальные условия: при } x = 0, y = 0, y' = 3.$$

9.53. Ускорение движущейся прямолинейно точки изменяется по закону $a = 8t - 2$. Найдите уравнение ее движения, если в момент $t = 3$ с ее скорость $v = 6$ м/с и путь $S = 15$ м.

Задания к главе 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики

$$10.1. \quad \text{Вычислите: а) } \frac{6! - 5!}{4!}; \text{ б) } \frac{6!}{3! + 4!}; \text{ в) } \frac{4!6!}{8!}.$$

10.2. Вычислите: а) $\frac{P_{20}}{P_5 \cdot P_{15}}$; б) $\frac{P_5 \cdot P_{(x+1)}}{P_3 \cdot P_{(x-1)}}$.

10.3. Сколькими способами можно расставить 6 книг на полке?

10.4. Из шести книг надо выбрать три. Сколькими способами это можно сделать?

10.5. Сколькими способами можно разместить 6 детей на шестиместной карусели с неразличимыми местами?

10.6. Решите уравнение $2C_{x+2}^{x+1} = A_{x+2}^3$, где x — натуральное число.

10.7. Докажите, что:

$$C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3; 1 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n+1)^3.$$

10.8. Из восьми сотрудников в июле могут пойти в отпуск три человека. Сколькими способами это можно сделать?

10.9. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в турнире?

10.10. Сколькими способами можно выставить дозор из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?

10.11. Сколькими способами можно расставить на полке четыре различные книги по алгебре и три различные книги по геометрии с учетом их порядка, чтобы все книги по геометрии стояли подряд?

10.12. На плоскости даны n точек, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Определите, сколько различных прямых можно провести через эти точки.

10.13. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найдите относительную частоту попаданий в цель.

10.14. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу выбраны 9 студентов. Найдите вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

10.15. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?

10.16. Какова вероятность того, что при пяти подбрасываниях монеты она три раза упадет гербом кверху?

10.17. Группа туристов, состоящая из 12 юношей и 8 девушек, выбирает по жребию хозяйственную команду в составе 4 человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся двое юношей и две девушки?

10.18. Вероятность попадания в кольцо с места штрафного броска для данного баскетболиста равна 0,6. Баскетболист сделал серию из 4 бросков. Какова вероятность того, что при этом было ровно 3 попадания?

10.19. Прибор состоит из двух последовательно включенных блоков. Вероятность выхода из строя за один месяц работы первого блока равна $\frac{1}{3}$, второго — $\frac{1}{4}$, а обоих — $\frac{1}{6}$. Найдите вероятность безаварийной работы прибора в течение месяца.

10.20. В корзине 10 яблок, из которых четыре зеленых. Наудачу достали три яблока. Найдите вероятность того, что хотя бы одно из выбранных яблок зеленое.

10.21. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найдите вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

10.22. Внутри круга радиуса R наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

10.23. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найдите вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

10.24. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса.

10.25. В отделении 12 солдат. В наряд назначаются два человека наугад. Какова вероятность попасть в наряд для каждого данного солдата?

10.26. В первой урне 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взяли один шар. Найдите вероятность того, что взят белый шар.

10.27. В семье пятеро детей. Найдите вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

10.28. Игральная кость подброшена 10 раз. Найдите вероятность выпадения единицы 7 раз.

10.29. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех; б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

10.30. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

а)

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

б)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

Постройте многоугольник (полигон) распределения.

10.31. Напишите биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X — числа появлений герба при двух бросках монеты.

10.32. В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X — числа стандартных деталей среди отобранных.

10.33. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Постройте ряд распределения числа попаданий.

10.34. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1; \\ \frac{x-1}{2}, & \text{если } 1 \leq x \leq 3; \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Вычислите вероятности попаданий случайной величины X в интервалы $(1,5; 2,5)$ и $(2,5; 3,5)$.

10.35. Случайная величина X подчиняется закону с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ a(3x - x^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 3; \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найдите коэффициент a . Постройте график распределения плотности. Определите вероятность попадания X в промежуток $(1, 2)$.

10.36. Случайная величина X задана функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2; \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 \leq x \leq 3; \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найдите ее плотность распределения и вычислите вероятность попадания случайной величины X в интервалы $(1; 2,5)$ и $(2,5; 3,5)$.

10.37. Монету подбрасывают 7 раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа появлений герба.

10.38. Игральную кость подбросили 12 раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа невыпадения единицы.

10.39. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке $[2, 8]$. Найдите вероятность попадания случайной величины в промежуток $(3, 5)$.

10.40. Через каждый час измерялось напряжение тока в электросети. При этом были получены следующие значения (в вольтах):

227; 219; 215; 230; 232; 223; 220; 222; 218; 219; 222; 221; 227; 226; 226; 209; 211; 215; 218; 220; 216; 220; 220; 221; 225; 224; 212; 217; 219; 220.

Постройте статистическое распределение и начертите полигон.

10.41. Постройте дискретный вариационный ряд и начертите полигон распределения 60 абитуриентов по числу баллов, полученных ими на приемных экзаменах:

20; 19; 22; 24; 21; 18; 23; 17; 20; 16; 15; 23; 21; 24; 21; 18; 23; 21; 19; 20; 24; 21; 20; 18; 17; 22; 20; 16; 22; 18; 20; 17; 21; 17; 19; 20; 20; 21; 18; 22; 23; 21; 25; 22; 20; 19; 21; 24; 23; 21; 19; 22; 21; 19; 20; 23; 22; 25; 21; 21.

10.42. Найдите эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

б)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

10.43. Постройте гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 100$:

Номер интервала i	Частный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
1	1—5	10	2,5
2	5—9	20	5
3	9—13	50	12,5
4	13—17	12	3
5	17—21	8	2

10.44. Заполнив предварительно последний столбец таблицы, постройте гистограмму частот по данному распределению выборки:

i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	2—7	5	
2	7—12	10	
3	12—17	25	
4	17—22	6	
5	22—27	4	

10.45. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найдите: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и «исправленную» дисперсии ошибок прибора.

10.46. По приведенным результатам измерения роста случайно отобранных 100 студентов найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов. (В качестве варианта принять середины указанных интервалов.)

Рост, см	154— 158	158— 162	162— 166	166— 170	170— 174	174— 178	178— 182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

10.47. Дана корреляционная таблица для величин X и Y . Определите коэффициент корреляции и уравнения прямых регрессии.

X	Y									
	0	2	7	12	17	22	27	32	37	42
0	3	6								
1	25	108	44	8	2					
2	3	50	60	21	5	5				
3	1	11	33	32	13	2	3	1		
4		5	5	13	13	7	2			
5			1	2	12	6	3	2	1	
6		1		1			2	1		1
7			1	1				1		

Глава 1

- 1.1. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. 1.2. а) {2, 3}; б) $\emptyset$. 1.3. а) нет; б) да. 1.4. $2^3 = 8$.
 1.7. Да. 1.8. 3; 4; 7; 5; 30; $6 - 2\sqrt{2}$; $6 + 2\sqrt{2}$. 1.9. а) $b + a$; б) $2ah$. 1.10. $f(0) = -3$;
 $f(1) = -\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x(2-3x)}{x^2+1}$; $\frac{1}{f(x)} = \frac{x^2+1}{2x-3}$. 1.11. а) 1, 4, 9, 16, ...;
 б) 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ...; в) 1, $-\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $-\frac{1}{4^2}$, ...; г) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, ... 1.12. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{10}{11}$, ...
 1.13. 2. Указание: $n + \frac{1}{n} \geq 2$. 1.14. Да. Второе утверждение неверное. Напри-
 мер, если $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$, то $A \sim B$, но $A \neq B$. 1.15. $y = (b - a)x + a$.
 1.16. а) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; б) $y = \frac{x}{x+2}$; в) $y = x^3 + 2$. 1.17. $\frac{2}{3}$ м/с. 1.18. $|F| = \frac{k}{r^2}$, где
 F — сила; k — скорость; r — расстояние. 1.19. 8 000 м²; 12 000 м². 1.20. Ука-
 зание: стройте график функции отдельно на каждом отрезке $[n, n + 1]$,
 где n — целое число. 1.21. См. указание к задаче 1.20. 1.22. Цилиндр.
 1.23. а) $B = \frac{Ap}{100}$; б) $p = \frac{B \cdot 100}{A} \%$. 1.24. Нет. 1.25. а) да; б) нет ($a \neq -b$).
 1.26. $x = 1,5$. 1.27. $x = 2$. 1.28. $x_1 = -11$; $x_2 = 4$. 1.29. $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.
 1.30. $x_1 = -2a$; $x_2 = 3a$. 1.31. $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$. 1.32. $x_1 = 2$; $x_2 = 7$.
 1.33. $x_1 = \frac{a}{b}$; $x_2 = -\frac{b}{a}$. 1.34. $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 4$; $x_4 = -4$. 1.35. $x_1 = 2,4$; $x_2 = 1,2$.
 1.36. $x = 1$. 1.37. $x_1 = 0$; $x_2 = -2$. 1.38. $\emptyset$. 1.39. $\emptyset$. 1.40. $x < \frac{13}{5}$. 1.41. $\emptyset$.
 1.42. $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. 1.43. $(-\infty, -5)$. 1.44. $1 < x \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$. 1.45. $\emptyset$.
 1.46. $(-\infty, +\infty)$. 1.47. $\emptyset$. 1.48. $x < 1$. 1.49. $\begin{cases} x > 4\frac{2}{7}; \\ -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} < y < x - 5. \end{cases}$
 1.50. $\begin{cases} x \leq \frac{4}{5}; \\ 2x - 1 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}. \end{cases}$ 1.51. $\begin{cases} -\infty < x < +\infty; \\ 2 - x < y < 5 - x. \end{cases}$

Глава 2

- 2.1. а) 32; б) 17; в) 26. 2.2. а) $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$; б) $805 = 5 \cdot 7 \cdot 23$; в) $957 = 3 \cdot 11 \cdot 29$.
 2.3. а) делится на 2, 4, 5, 10, 25; б) делится на 2, 3, 9; в) делится на 2, 3, 9;

г) делится на 2, 4, 5, 10; д) делится на 3, 5; е) делится на 2, 3, 5, 9, 10; ж) делится на 3. **2.4.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. **2.5.** 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70. **2.6.** а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет. **2.7.** $899 = 30^2 - 1 = 29 \cdot 31$. **2.8.** Искомое число — это НОК (24; 45; 56) + 1 = 2521. **2.10.** Указание: используйте метод рассуждений от противного. **2.11.** а) 3,141; 3,142; б) 57,295; 57,296; в) 2,718; 2,719; г) 2,302; 2,303. **2.12.** а) 0,035; б) 0,8175; в) -2,816; г) -1,2596.

2.13. а) 0,(428571); б) 5,(6); в) -7,(1); г) 3,(81). **2.14.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{8}{45}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{13}{27}$;

д) $-\frac{3}{11}$. **2.15.** 6400; 6360; 6357. **2.16.** 615 км (± 5 км). **2.17.** Первое. **2.18.** 4.

2.19. 0,0005 %. **2.20.** $\Delta = 0,0016$; $\delta \approx 0,05$ %. **2.21.** а) 0,517; б) 0,012. **2.22.** а) 2;

б) $\sqrt{2}-1$; в) $\frac{1}{x-1}$ при $x > 1$, $\frac{1}{1-x}$ при $x < 1$. **2.23.** Не может. **2.25.** а) $x \geq 2$,

$x \leq -2$; б) $0 < x \leq 3$, $-3 \leq x < 0$; в) $1 < x < 3$; г) $a - \delta < x < a + \delta$; д) $x > a + \delta$,

$x < a - \delta$; е) $a - \delta < x < a$, $a < x < a + \delta$. **2.26.** а) $x = \frac{2}{3}$; б) $x_1 = 4$; $x_2 = -2$; в) $\emptyset$;

г) $x = -1$. **2.27.** а) $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$; б) $(-\infty, -3) \cup (7, +\infty)$; в) $2 \leq x \leq 4$;

г) $(-\infty, -5) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$; д) $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$; е) $-1 < x < 4$; ж) $-1 < x < 0$;

з) $\begin{cases} y > -2x + 1; \\ y < -2x - 1; \end{cases}$ и) $\begin{cases} y > \frac{x}{3} - \frac{1}{6}; \\ y < \frac{x}{3} + \frac{1}{6}; \end{cases}$ к) $3x - 2 < y < 3x + 2$. **2.29.** а) $2\frac{2}{15} + 4\frac{2}{3}i$;

б) $-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2}i$. **2.30.** а) 2; б) $\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + (\sqrt{6} - 3)i$; в) $-43 + 81i$; г) $7 + 24i$. **2.31.** а)

$\frac{17}{53} + \frac{20}{53}i$; б) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$; в) 1,6; г) $-\sqrt{3}$. **2.32.** $x = 2$; $y_1 = 3$; $y_2 = -3$. **2.33.** $x = 5$;

$y = -2$. **2.34.** а) $3 - 2\sqrt{5}i$; б) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. **2.36.** а) 1; б) i ; в) -1; г) 1. **2.37.** а) круг

с центром в точке $z = 1$ и радиусом $R = 1$; б) круг с центром в точке $z = c$ и радиусом $R = a$; в) окружность с центром в точке $z = c$ и радиусом $R = a$.

2.38. а) ось Ox при $x > 0$; б) ось Ox при $x < 0$; в) ось Oy при $y > 0$; г) луч, исходящий из начала координат под углом $\frac{\pi}{3}$ к оси Ox . **2.39.** а) $\pm 5i$; б) $1 \pm 2i$;

в) $-2 \pm 3i$. **2.40.** $z^2 - 2z + 4$. **2.41.** а) $r = 3$, $\varphi = 0$; б) $r = 2$, $\varphi = \pi$; в) $r = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

г) $r = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; д) $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; е) $r = 2$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. **2.42.** Криволинейный «сек-

тор», расположенный между двумя лучами, исходящими из начала координат

под углами $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ к оси Ox , и двумя окружностями с центром в точке $z = i$ и радиусами 1 и 3.

Глава 3

3.2. а) $x = 0$, да; б) $x = 1$, да; в) $x = 0$, да. 3.3. а) 4; б) 11. 3.4. Указание: рассмотрите отдельно случаи $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$. Обратное утверждение неверно: пример — последовательность $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. 3.5. Указание: рассмотрите поведение членов последовательности для случаев $n = 2m$ и $n = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots$. 3.6. Указание: воспользуйтесь определениями бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей. 3.7. -1. 3.8. $\frac{2}{3}$. 3.9. 3. 3.10. Указание: умножьте и поделите выражение на $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$; 0. 3.11. 0. 3.12. 1. 3.13. e^3 . 3.14. 1. 3.15. $\delta = 0,0099$. 3.16. 4. 3.17. $+\infty$. 3.18. $-\infty$. 3.19. 12. 3.20. 1. 3.21. 2. 3.22. -1. 3.23. $-\frac{1}{56}$. 3.24. $-\frac{5}{2}$. 3.25. -1. 3.29. $\Delta y = (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x$. 3.31. $\lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2+0} y = +\infty$; $x = 2$ — точки разрыва II рода. 3.33. $x = \pm 2$ — точки разрыва I рода. 3.34. Функция непрерывна. 3.35. Разрыв I рода в точке $x = 3$. 3.38. Нет: пример $y_1 = \frac{x+1}{x}$, $y_2 = \frac{x^2+x}{x+1}$. 3.39. Указание: рассмотрите поведение приращения $\Delta|f(x)|$ при $\Delta x \rightarrow 0$ при различных вариантах знака $f(x)$ вблизи данной точки. 3.40. 4. 3.41. Вертикальная асимптота $x = 2$; горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. 3.43. Вертикальные асимптоты $x = 1$ и $x = 3$; горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. 3.37. Наклонная асимптота $y = x$ при $x \rightarrow \pm\infty$. 3.44. Наклонные асимптоты: $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$; $y = -x$ при $x \rightarrow -\infty$. 3.45. Наклонная асимптота $y = x - 1$. 3.46. $f(x) = x^2 + x - 1$.

Глава 4

4.1. $\sqrt{\frac{b}{a}}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})$. 4.2. $\frac{5ab^{n-2}}{9c^3x^ny^2}$. 4.3. 1. 4.4. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. 4.5. $x \neq 3$. 4.6. $x > 3$. 4.7. $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$. 4.8. $(-3; 5)$. 4.9. $(-4; +\infty)$. 4.10. а) 1; б) 24. 4.11. а) «+»; б) «+». 4.12. $2\cos^2\alpha$. 4.13. $\alpha \neq \frac{\pi}{3}(2\pi+1)$; $n \in \mathbb{Z}$; $2\cos\alpha$. 4.14. $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$; $\alpha \neq -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\alpha \neq -\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; 1. 4.16. $\frac{\pi}{2}$. 4.17. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4.18. $-\frac{\pi}{6}$. 4.19. 0. 4.21. 0,5. 4.22. а) четная; б) ни четная, ни нечетная; в) четная; г) ни четная, ни нечетная; д) нечетная. 4.25. а) нет основного периода; б) π ; в) $\frac{\pi}{3}$; г) 2π . 4.28. а) возрастает на $(-1, 0) \cup [1, +\infty)$; убывает на $(-\infty, -1] \cup [0, 1)$. Указание: $y = (x^2 - 1)^2 - 4$; б) убывает на $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Указание: $\log_1 \frac{x}{x+1} = \log_2 \frac{x+1}{x} = \log_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$; в) монотонно убывает на каждом из участков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. 4.29. а) $\lg \cos^2 t$, $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{t-1}{t+1}$, $t \neq -1$; в) $\frac{t-1}{t}$, $t \neq 0$; г) $\sqrt{4 - 2^{t^2-3t+2}}$, $t \in [0, 3]$. Указание: решите неравенство: $t^2 - 3t$

$$+ 2 \leq 2. \quad \mathbf{4.53.} \quad 9. \quad \mathbf{4.54.} \quad 2, \frac{5}{2}. \quad \mathbf{4.55.} \quad 0; 2. \quad \mathbf{4.56.} \quad 2; -2. \quad \mathbf{4.57.} \quad 2. \quad \mathbf{4.58.} \quad \frac{1}{2}. \quad \mathbf{4.59.} \quad 2. \\ \mathbf{4.60.} \quad 2. \quad \mathbf{4.61.} \quad -5; 5. \quad \mathbf{4.62.} \quad 1. \quad \mathbf{4.63.} \quad 5. \quad \mathbf{4.64.} \quad 3. \quad \mathbf{4.65.} \quad 3; 81. \quad \mathbf{4.66.} \quad 2. \quad \mathbf{4.67.} \\ \frac{\pi}{2} n; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{4.68.} \quad \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{4.69.} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ \mathbf{4.70.} \quad 2\pi n; \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{4.71.} \quad \frac{\pi}{2} n; \frac{\pi}{11} n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{4.72.} \quad \frac{\pi}{2} + \pi n; \arctg 3 + \pi n; \\ \arctg \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{4.73.} \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3}{2} \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{4.74.} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}. \quad \mathbf{4.75.} \quad (2; 3); \\ (3; 2). \quad \mathbf{4.76.} \quad (4; 1); (1; 4). \quad \mathbf{4.77.} \quad \begin{cases} \arctg 2 + \pi n; \\ \arctg 2 - \pi n; \end{cases} \begin{cases} \arctg 2 + \pi n; \\ \arctg 2 - \pi n; \end{cases} n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{4.78.} \quad x < 3; \\ x > 5. \quad \mathbf{4.79.} \quad x < -3; x > -\frac{2}{3}. \quad \mathbf{4.80.} \quad -2 < x < 1; 3 < x < 5. \quad \mathbf{4.81.} \quad -\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{2}.$$

Глава 5

$$\mathbf{5.2.} \quad B_2(0; -1), B_3(1; 0), B_4(0; 1). \quad \mathbf{5.3.} \quad B_1(1; \pi), B_2\left(1; -\frac{\pi}{2}\right), B_3(1; 0), B_4\left(1; \frac{\pi}{2}\right). \\ \mathbf{5.4.} \quad A\left(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right). \quad \mathbf{5.5.} \quad A(1; \sqrt{3}). \quad \mathbf{5.6.} \quad C_2(1, 1, -1), C_3(1, -1, 1), C_4(1, -1, -1), \\ C_5(-1, 1, 1), C_6(-1, 1, -1), C_7(-1, -1, 1), C_8(-1, -1, -1). \quad \mathbf{5.8.} \quad 2. \quad \mathbf{5.9.} \\ |AB| = 2\sqrt{5}, |BC| = \sqrt{10}, |CA| = \sqrt{10}. \quad \mathbf{5.10.} \quad |AB| = 3. \quad \mathbf{5.11.} \quad 1. \quad \mathbf{5.12.} \quad \sqrt{3}. \quad \mathbf{5.13.} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \mathbf{5.15.} \quad \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \text{ при сдвиге } x_1 = x - 2, y_1 = y + 1. \quad \mathbf{5.16.} \quad x_1^2 + 4y_1^2 = 16. \quad \mathbf{5.24.} \\ \overline{OM}(8; -2), |\overline{OM}| = 2\sqrt{17}. \quad \mathbf{5.25.} \quad 5; \sqrt{29}. \quad \mathbf{5.26.} \quad 5\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}; 3\sqrt{6}. \quad \mathbf{5.27.} \quad -4\bar{j} - 12\bar{k}. \\ \mathbf{5.28.} \quad \text{а) } \bar{a}(3; -2; 6); \bar{b}(-5; 3; -6); \quad \text{б) } \bar{a} - \bar{b} = (8; -5; 12); \quad \text{в) } |\overline{AB}| = 7. \quad \mathbf{5.29.} \\ |\overline{OM}| = 5\sqrt{2}; \cos \alpha = 0, 5\sqrt{2}; \cos \beta = -0, 3\sqrt{2}; \cos \gamma = 0, 4\sqrt{2}. \quad \mathbf{5.30.} \quad \overline{OC} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}; \\ |\overline{OC}| = \sqrt{6}; \overline{AB} = -\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}; |\overline{AB}| = 3\sqrt{2}. \quad \mathbf{5.31.} \quad \frac{\pi}{4}. \quad \mathbf{5.32.} \quad -1. \quad \mathbf{5.33.} \quad 3. \quad \mathbf{5.34.} \quad -13. \\ \mathbf{5.35.} \quad A = (\overline{F}, \overline{M_1 M_2}) = 17. \quad \mathbf{5.36.} \quad \cos \gamma = \frac{7}{3\sqrt{11}}. \quad \mathbf{5.37.} \quad 30^\circ. \quad \mathbf{5.38.} \quad (3; -6; 0). \quad \mathbf{5.39.} \\ \mathbf{4.540.} \quad 6. \quad \mathbf{5.41.} \quad \text{Площадь параллелограмма, построенного на диагоналях} \\ \text{данного параллелограмма, вдвое больше площади данного параллелограмма.} \\ \mathbf{5.42.} \quad 24. \quad \mathbf{5.44.} \quad 40. \quad \mathbf{5.45.} \quad 68. \quad \mathbf{5.46.} \quad \text{Второй и третий столбцы состоят из про-} \\ \text{порциональных элементов.} \quad \mathbf{5.47.} \quad 14. \quad \mathbf{5.48.} \quad 1. \quad \mathbf{5.50.} \quad \text{а) } x = 5, y = -4; \quad \text{б) } x = 1, \\ y = 0. \quad \mathbf{5.51.} \quad \text{а) } x = 5, y = 6, z = 10; \quad \text{б) } x = 0, y = -5, z = 24. \quad \mathbf{5.52.} \quad \text{Решений} \\ \text{нет.}$$

Глава 6

$$\mathbf{6.1.} \quad \text{а) } y = x + 3; \quad \text{б) } y = -x + 3. \quad \mathbf{6.2.} \quad \text{а) } y = x; \quad \text{б) } y = \sqrt{3}x; \quad \text{в) } y = -\sqrt{3}x; \quad \text{г) } x = \\ = 0. \quad \mathbf{6.4.} \quad y = 0; 4x - 3y = 0; y = 4; 4x - 3y + 12 = 0. \quad \mathbf{6.5.} \quad A \text{ и } C \text{ — на прямой;} \\ B \text{ — выше; } D \text{ — ниже.} \quad \mathbf{6.6.} \quad x - y = \pm a. \quad \mathbf{6.7.} \quad x + y - 4 = 0; y = 3; x - y + 4 = 0; \\ y = 0. \quad \mathbf{6.8.} \quad \text{а) } \arctg \frac{3}{4}; \quad \text{б) } \frac{\pi}{4}; \quad \text{в) } \frac{\pi}{4}; \quad \text{г) } 0; \quad \text{д) } \frac{\pi}{2}. \quad \mathbf{6.9.} \quad 5x + 2y + 4 = 0; 5x + 2y = 25.$$

6.10. $y = -x + 2$. **6.11.** $(3, -1); (3, 3); \left(-\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right); 45^\circ; \approx 71^\circ; \approx 63^\circ$. **6.12.** Указание: изобразите на рисунке линии пересечения плоскостей с координатными плоскостями (если они пересекаются). **6.13.** $\cos \alpha = \frac{2}{7}$; $\cos \beta = \frac{3}{7}$; $\cos \gamma = \frac{6}{7}$. **6.14.** $x + y = 2a$. **6.15.** $3y + 2z = 0$. **6.16.** $x + y + z = 4$. **6.17.** $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = -\frac{2}{3}$; $\cos \gamma = \frac{1}{3}$. **6.18.** $x + y = 4$. **6.19.** $\frac{\pi}{4}$. **6.20.** $x - 2y - 3z = 4$. **6.21.** $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}$. **6.22.** а) $\bar{i}$; б) $\bar{i} + \bar{k}$. **6.23.** $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.25.** Указание: приведите уравнения прямых к каноническому виду; $\cos \varphi = \frac{20}{21}$; $\varphi \approx 17^\circ$. **6.26.** $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **6.27.** $x + 2y - 2z = 1$. **6.28.** 9. **6.30.** 13. **6.31.** $x + 7y + 10z = 0$. **6.32.** $32x + 21y + 10z = 63$. **6.33.** 6. **6.34.** $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$; A и O — на окружности; B — вне ее. **6.35.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ или $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **6.36.** $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$. **6.37.** Указание: используйте метод выделения полного квадрата; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. **6.38.** Гипербола с каноническим уравнением $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. **6.39.** Точка $A(2, 1)$. **6.40.** Пустое множество (мнимый эллипс). **6.41.** Парабола с каноническим уравнением $y = -x^2$. **6.42.** Прямые $x = 2$ и $x = 4$. **6.43.** Пустое множество (мнимые прямые). **6.44.** $x^2 + y^2 + 4x = 0$. **6.45.** $C(1, 5; -2, 5; 2); R = 2,5\sqrt{2}$. **6.46.** Указание: определите тип поверхности, используя преобразование сдвига и метод сечений, т.е. анализ линий, возникающих в сечении поверхности координатными (или параллельными им) плоскостями. **6.47.** См. указание к предыдущей задаче. Поверхность — гиперболический параболоид. **6.48.** а) $z = x^2 + y^2$; б) $\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$. **6.49.** $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. **6.51.** а) сфера; б) параболоид; в) конус; г) параболический цилиндр; д) параболоид вращения.

Глава 7

7.1. а) $4x^3$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $-\frac{1}{x^2}$; г) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$; д) $-\frac{1}{x^3}$. **7.2.** 1; 0; 4. **7.3.** -90 . **7.4.** 8 град/с. **7.5.** Через 3 с. **7.6.** а) $(x-2)^2$; б) $\frac{2}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)$; в) $\frac{1}{(1-4x)^2}$; г) $\frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x}$; д) $-\operatorname{ctg} x$; е) $x(2\sin x + x\cos x)$; ж) $\frac{1}{x \ln 10} \approx \frac{0,4343}{x}$; з) $a^{\sin x} \cos x \ln a$; и) $2e^x \cos x$; к) $\frac{x^2}{1+x^2}$; л) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$; м) $-\frac{\ln x}{x^2}$. **7.7.** а) $\frac{(x+1)^2}{x^3}$; б) $((2x^2+3x)\ln 2+1) \cdot 2^{3x+x^2}$; в) $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$; г) $\operatorname{ctg} 2x$; д) $\arccos x$; е) $\frac{2}{1-x^4}$; ж) $\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$. **7.8.** а) $100(x+1)^{99}$; б) $\frac{2}{3} \left(x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{5}{3}} \right)$; в) $\frac{1}{8\sqrt{1+x}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}$.

г) $2x + 2^x \ln 2$; д) $-3x^2 \sin x^3$; е) $2 \cos 2x$; ж) $\frac{2 \exp \left\{ \frac{\ln^2 x}{\ln(2)} \right\} \ln x}{x \ln 2}$; з) $-3 \sin(2 \cos^3 x) \cos^2 x \sin x$.

7.9. $-\frac{1}{3a}$. 7.11. $x = \frac{1}{5} \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{1}{5} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.12. а) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 7.13. $\left(1, \frac{5}{2} \right)$. 7.14. $(0, 5)$.

7.15. $(-7, 4)$. 7.16. $y = x + \frac{2}{3}$. 7.17. $y = 4x$; $y = 16 - 4x$. 7.18. $(-2, -4)$. 7.19. $\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4} \right)$.

7.20. $4x - y + 6 = 0$; $x - 4y + 54 = 0$. 7.21. $\Delta y = 0,001002$; $dy = 0,001$. 7.22. $dV = 3x^2 dx = 0,75$; $\frac{dV}{x^3} \cdot 100\% = 0,006 \cdot 100\% = 0,6\%$. 7.23. а) $3(x-1)^2 dx$; б) $4 \sin^2 \varphi d\varphi$;

в) $-R \sin 2t dt$. 7.24. а) $(4x^3 + 6x - 9x^2 - 3) dx$; б) $\left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx$; в) $-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

г) $15 \operatorname{ctg}(5x) dx$. 7.25. а) $2 \cos 2x$; б) $2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$; в) $\frac{1}{(1+x)^2}$. 7.26. а) $-\frac{1}{x^2}$;

б) $e^{-t}(3-t)$; в) $-(x \cos x + 3 \sin x)$; г) $\frac{2a(3x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^3}$; д) $\frac{2}{(2-t^2)^2}$. 7.27. а)

$\left(\frac{1}{a} \right)^n e^{-\frac{x}{a}}$; б) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; в) $n!$; г) $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$. 7.28. $\approx 1\%$. 7.29. а)

1009; б) 4,999. 7.30. а) 0,983; б) 1,07. 7.31. $\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$.

7.32. а) возрастает на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; убывает на $(-1, 1)$; б) возрастает на $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$; убывает на $(-3, 5)$; в) убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, 1)$; возрастает на $(1, +\infty)$; г) возрастает на $(0, +\infty)$; убывает на $(-\infty, 0)$; д) убывает на $(-\infty, +\infty)$. 7.33. $y_{\text{наиб}} = 54$; $y_{\text{наим}} = -135$. 7.34. $y_{\text{наиб}} = \frac{3}{4}$; $y_{\text{наим}} = -\frac{3}{2}$.

7.35. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. 7.36. а) выпукла на $(-\infty, -3)$; вогнута на $(-3, +\infty)$; б) выпукла на $(-\infty, 0)$; вогнута на $(0, +\infty)$; в) вогнута на $(0, +\infty)$. 7.37. а) выпукла на $(-\infty, 1)$; вогнута на $(1, +\infty)$; $(1, -1)$ — точка перегиба; б) выпукла на $(-1, 1)$; вогнута на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ — точки перегиба; в) вогнута на $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; выпукла на $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$; $(0, 0)$, $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ — точки перегиба. 7.38. 4 м; 4 м; 2 м. 7.39. $x = 1,5$. 7.40. $R \sqrt{\frac{2}{3}}$; $R \sqrt{\frac{2}{3}}$.

7.41. $18 \frac{1}{3}$ кг. 7.42. а) $\frac{5}{2}, \frac{7}{5}, \frac{9}{10}, \frac{11}{17}, \frac{1}{2}$; б) 2, -1, $\frac{4}{9}, -\frac{5}{27}, \frac{2}{27}$. 7.43. а) $a_n = \frac{1}{n^3}$;

б) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n}{3n+2}$. 7.44. а) $s = \frac{10}{11}$; б) $s = 1$; в) указание: сгруппируйте члены по два; $s = \frac{6}{5}$. 7.45. а) $\sigma_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)$; $s = \frac{1}{3}$; б) $\sigma_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$; $s = 1$. 7.46. а), б), д) — расходятся; в), г) — необходимый признак ответа не дает. 7.47. Расходится. 7.48. Сходится. 7.49. Расходится. 7.50. Сходится. 7.51. Сходится. 7.52. Сходится. 7.53. Расходится. 7.54. Сходится. 7.55. Сходится. 7.56. Рас-

ходится. **7.57.** Сходится. **7.58.** Сходится. **7.59.** Сходится. **7.60.** Расходится. **7.61.** Расходится. **7.62.** Сходится. **7.63.** Расходится. **7.64.** Сходится абсолютно при $|x| > 1$. **7.65.** а) $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $R = 1$; $(-1; 1)$; в) $R = 1$; $[3; 5]$. **7.66.** а) $x + \frac{x^2}{1!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n!} + \dots$, $(-\infty < x < \infty)$; б) $2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$, $(-\infty < x < \infty)$; в) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $(-\infty < x < \infty)$. **7.67.** Указание: обеспечить заданную точность, оценивая величину остаточного члена в формуле Лагранжа; 18° соответствует $\frac{\pi}{10}$ радиан; $\frac{\pi}{10} \approx 0,3142$; а) 0,9510; б) 0,454.

Глава 8

- 8.1.** а) x^4 ; б) 2^{3x} ; в) $-\sin 2x$; г) $\operatorname{arctg} x$; д) $\operatorname{tg} x$. **8.2.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$. **8.3.** $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} + c$. **8.4.** $-2\cos x + 3\sin x + c$. **8.5.** $\frac{x^9}{9} + c$. **8.6.** $-\frac{1}{x^2} + c$. **8.7.** $\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + c$. **8.8.** $\frac{3}{2}x\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{5}}{3}x\sqrt{x} + x + c$. **8.9.** $x + \cos x + c$. **8.10.** $e^x - \frac{1}{x} + c$. **8.11.** $\frac{6^x}{\ln 6} + c$. **8.12.** $\operatorname{tg} x - 3\cos x + c$. **8.13.** $x(a^2 + abx + \frac{b^2}{3}x^2) + c$. **8.14.** $\frac{x^4}{8} + \frac{1}{x^2} + c$. **8.15.** $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + c$. **8.16.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + c$. **8.17.** $\frac{1}{3}\arcsin \frac{3x}{2} + c$. **8.18.** $\frac{(3x-5)^{31}}{93} + c$. **8.19.** $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$. **8.20.** $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + c$. **8.21.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + c$. **8.22.** $\frac{1}{3}\sqrt{(a+x^2)^3} + c$. **8.23.** $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + c$. **8.24.** $-\frac{1}{\ln x} + c$. **8.25.** $-3\cos\sqrt{x} + c$. **8.26.** $\frac{2}{9}(x^3 + 5)\sqrt{x^3 + 5} + c$. **8.27.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + c$. **8.28.** $-5\sqrt{3-x^2} + 3\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + c$. **8.29.** $-\frac{1}{3(x-1)^3} + c$. **8.30.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} \frac{x-3}{3} + c$. **8.31.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 7) + c$. **8.32.** $\frac{5}{2}\ln(x^2 + 10x + 29) - 14\operatorname{arctg} \frac{x+5}{2} + c$. **8.33.** $-\frac{2}{3}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-3| + c$. **8.34.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right| + c$. **8.35.** $\frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$. **8.36.** $x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$. **8.37.** $x(\ln x - 1) + c$. **8.38.** $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + c$. **8.39.** $e^x(x-1) + c$. **8.40.** $\frac{1}{9}(3x\sin 3x + \cos 3x) + c$. **8.41.** $\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 6x}{12} + c$. **8.42.** $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$. **8.43.** $\frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin 6x + c$. **8.44.** $\frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x) + c$. **8.45.** $\frac{1}{4}\ln \frac{5-\sin x}{1-\sin x} + c$. **8.46.** $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$. **8.48.** а) $\frac{\pi}{2} \leq I \leq \frac{e\pi}{2}$; б) $0 < I < 1$. **8.49.** $3(e-1)$. **8.50.** $2\frac{5}{8}$. **8.51.** $-\frac{25}{6}$. **8.52.** $\frac{\pi}{6}$. **8.53.** $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.54.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **8.55.** $\sqrt{2} - 1$. **8.56.** 3 . **8.57.** $\sqrt{e} - 1$.

8.58. 4,5. 8.59. 18. 8.60. $\sqrt{2}-1$. 8.61. $10\frac{2}{3}$. 8.62. $2(8\ln 2 - 3)$. 8.63. $5\frac{1}{3}$.
 8.64. $1 - \ln 2$. 8.65. $\frac{20}{9}\sqrt{3}$. 8.66. $\frac{1}{2}\ln 3$. 8.67. $\frac{61}{1728}\pi$. 8.68. 2π . 8.69. $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{4}{5}\pi$.
 8.70. $\pi^2/4$. 8.71. $\frac{3\ln 2}{\pi}$. 8.72. $\frac{\pi}{4}$. 8.73. 1400 м. 8.74. 150 кг. 8.75. $x = e^{10}$.
 8.76. 144 т. 8.77. $48\,000 \text{ кг} \cdot \text{м}$.

Глава 9

9.3. $xy' = 2y$. 9.6. $y = \sin x$. 9.9. $y = \frac{3}{2}x^4 + C$. 9.10. $x = y - \operatorname{arctg} y + C$.
 9.11. $3^x + 3^{-x} = C$. 9.12. $y = (x + C)^2$; $y = 0$. 9.13. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$; $y = \pm 1$.
 9.14. $y = C \sin x - 1$; $y = -1$. 9.15. $xy = 8$. 9.16. $y = -x$. 9.17. $y = \frac{(x+3)^3}{27}$.
 9.18. $2(x-2) = \ln^2 y$. 9.19. $y = e^{\sqrt{x-2}}$. 9.20. $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$. 9.21. $y = e^{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}$.
 9.22. $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$. 9.23. $x = y^3 - 8$. 9.24. $s = \frac{5}{3}t^3 + 2t$, 51 м. 9.25. $xy =$
 $= -1$. 9.26. $s = 8e^{3t}$, $v = 24e^{3t}$. 9.27. $A(t) = Ae^{-kt}$. 9.28. 3а 40 мин. 9.31. $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$.
 9.32. $y = Cx^3 - x^2$. 9.33. $y = x(\sin x + C)$. 9.34. $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$. 9.35. $y = \frac{C - \cos 2x}{2\cos x}$.
 9.36. $y = e^{-x}(x + C)$. 9.37. $y = \frac{1}{x^2}(x \ln x - x + C)$. 9.38. $y = -\cos x$. 9.39. $y = 3x^2$.
 9.40. $s = 2t^2 + \frac{1}{t}$. 9.41. $\frac{1}{2}x^2 \ln x$. 9.42. $y = \frac{1}{3}\sin^3 x + C_1x + C_2$. 9.43. $y = -\ln|\cos x|$.
 9.44. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$. 9.45. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$. 9.46. $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.
 9.47. $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$. 9.48. $y = xe^{3x}$. 9.49. $y = 2\sin \frac{x}{3}$. 9.50. $y = C_1e^{2x} +$
 $+ C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x$. 9.51. $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2$. 9.52. $y =$
 $= \frac{1}{12}(13e^{2x} - 16e^x - 6x + 3)$. 9.53. $S = \frac{4}{3}t^3 - t^2 - 24t + 60$.

Глава 10

10.1. а) 25; б) 24; в) $\frac{3}{7}$. 10.2. а) 15 504; б) $20x(x+1)$. 10.3. 720. 10.4. 20.
 10.5. 720. 10.6. $x = 1$. 10.7. Указание: используйте формулу $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.
 10.8. 56. 10.9. 105. 10.10. 246 480. 10.11. 720. 10.12. $\frac{1}{2}n(n-1)$. 10.13. 0,9.
 10.14. $P = \frac{C_8^3 C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{14}{55}$. 10.15. $\frac{5}{31}$. 10.16. $\frac{5}{16}$. 10.17. $\approx 0,381$. 10.18. 0,346.

10.19. $\frac{7}{12}$. 10.20. $P = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{5}{6}$. 10.21. 0,432. 10.22. а) $P = \frac{2}{\pi}$; б) $P = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.
 10.23. $\frac{1}{495}$. 10.24. $\frac{57}{115}$. 10.25. $P = 0,2$. 10.26. $P = 0,5$. 10.27. а) $\approx 0,31$; б) $\approx 0,48$;
 в) $\approx 0,52$; г) $\approx 0,62$. 10.28. $\approx 2,48 \cdot 10^{-4}$. 10.29. а) вероятнее выиграть одну пар-
 тию из двух; $P_2(1) = \frac{1}{2}$, $P_4(2) = \frac{3}{8}$; б) вероятнее выиграть не менее двух партий
 из четырех: $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - [P_4(0) + P_4(1)] = \frac{11}{16}$; $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{8}{16}$.
 10.31.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

10.32.

X	0	1	2	3
P	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

10.33.

X	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

10.34. $p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,25$. 10.35. $a = \frac{2}{9}$; $P(1 < x < 2) = \frac{13}{27}$. 10.36.

$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2; \\ 2(x-2), & \text{если } 2 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{если } x > 3; \end{cases}$ $P_1 = 0,25$; $P_2 = 0,75$. 10.37. 3,5; 1,75. 10.38. 10;

$\frac{5}{3}$. 10.39. $P(3 < x < 5) = \frac{1}{3}$. 10.42. а) $F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2; \\ 0,1 & \text{при } 2 < x \leq 5; \\ 0,4 & \text{при } 5 < x \leq 7; \\ 0,6 & \text{при } 7 < x \leq 8; \\ 1 & \text{при } x > 8; \end{cases}$

б) $F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 4; \\ 0,5 & \text{при } 4 < x \leq 7; \\ 0,7 & \text{при } 7 < x \leq 8; \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$ 10.45. $\bar{x}_n = 100$; $D_n = 34$; $\sigma_n^2 = 42,5$. 10.46. $\bar{x}_n = 166$;

$D_n = 33,44$. 10.47. $r_{xy} = 0,664$; $\bar{y}_x = 3,64x - 0,15$; $\bar{x}_y = 0,12y + 1,24$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абстракция 13
Аксиома 121
— индукции 32
Аксиоматический метод 27
Апофема 139
Аргумент комплексного числа 48
— функции 16
Арифметические свойства предела последовательности 52
Арккосинус 51
Арсинус, график 84
Асимптота 59
— вертикальная 59
— горизонтальная 59
— наклонная 59
- Вектор 47
— единичный (орт) 99
— нормальный 116
Векторы
— коллинеарные 107
— компланарные 107
— ортогональные 110
Вероятность 221
— условная 233
Вогнутая кривая 160
Выборочная дисперсия 247
— совокупность (выборка) 244
— репрезентативная 244
— средняя 247
Выборочное среднеквадратическое отклонение 248
Выборочный коэффициент корреляции 250
Выпуклая кривая 160
- Генеральная совокупность 247
Геометрическая прогрессия 169
Гипербола 135, 141
Гистограмма 245
- Двугранный угол 125, 130
Действительная часть комплексного числа 47
Дисперсия 239
Дифференциал 152
Дифференциальное уравнение в частных производных 207
— обыкновенное 207
— с разделяющимися переменными 211
— линейное 216, 219
— неоднородное 219
— однородное 216
— второго порядка с постоянными коэффициентами 217
Дифференцирование 44, 147, 179
Дробь десятичная 38
— бесконечная 38
— периодическая 43
— обыкновенная 38
— рациональная 37
- Задача Коши 209
Закон больших чисел 224
— распределения дискретной случайной величины 226
— непрерывной случайной величины 227
— случайной величины нормальный 241
Замена переменной 90
- Изоморфизмы 30
Интеграл неопределенный 180
— несобственный 229
— определенный 188
— с переменным верхним пределом 191, 192
Интегральная кривая 196
— сумма 188
Интегрирование 44, 179

- Интервал 46
- Каноническое уравнение окружности, эллипса, гиперболы, параболы 132—136
 - прямой 127
- Касательная 146, 147
 - к сфере 144
 - плоскость 166
- Комбинаторика 230
- Композиция функций 87
- Коническое сечение 144
- Конус 142
- Координаты 99
 - полярные 100
- Косеканс 82
- Косинус угла 83
- Котангенс 83
- Коэффициент вариации 249
- Коэффициент корреляции 249
- Криволинейная трапеция 187
- Кривые второго порядка 132
- Линейная операция 179
- Линейное векторное пространство 99
- Линейный угол 125
- Логарифм 74
 - десятичный 74
 - натуральный 74
- Логарифмирование 74
- Логарифмическое неравенство 92
 - уравнение 92
- Локальный максимум 155
 - минимум 155
- Ломаная, вписанная в кривую 196
- Луч 46
- Математическое ожидание 237
- Матрица 113
 - вырожденная 118
 - квадратная 113
 - вырожденная 118
 - невырожденная 118
 - обратная 113
- Медиана 249
- Метод Гаусса (исключения переменных) 114
 - интегрирования по частям 182
 - математической индукции 133
 - наименьших квадратов 251
 - неопределенных коэффициентов 178
- подстановки (замены переменных) 182
- половинного деления 93
- сложения графиков 105
- Мнимая часть комплексного числа 47
- Многогранники 136—140
- Многочлен 87
- Множество 31—49
 - бесконечное 33
 - действительных чисел 31, 79
 - значений функции 16
 - комплексных чисел 31
 - конечное 33
 - натуральных чисел 31, 33, 35
 - ограниченное сверху (снизу) 68
 - пустое 14
 - рациональных чисел 31, 37
 - целых чисел 31, 36
 - числовое 31
- Мода 248
- Модуль числа 36, 48
 - действительного числа 45
 - комплексного числа 48
- Монотонность функции 68, 158
- Наклонная прямая к плоскости 124
- Направляющий косинус 108
- Начало отсчета 35
- Непрерывность множества действительных чисел 46
- Неравенство 24, 89
 - тригонометрическое 92
- Область определения функции 16, 161
 - сходимости функционального ряда 173
- Образ элемента 18
- Общее уравнение прямой 127
 - — плоскости 129
- Объединение множеств 14
- Объем тела вращения 200—203
- Окрестность 46
 - ϵ -окрестность 46
- Определение аксиоматическое 32
- Определитель 112, 116
- Основание логарифма 74
 - степени 69
- Ось абсцисс 100
 - аппликата 101

- ординат 100
- Отображение 16
 - взаимно-однозначное 18
- Отрезок 46
- Парабола 136, 141
- Параллельные прямые, плоскости 123, 124
- Параллелепипед 137
- Параметрическое уравнение окружности 130
 - прямой 127
- Первообразная 179
- Переменная зависимость 16
 - независимая 16
- Пересечение 14
- Перестановка 231
- Перпендикуляр 123
- Перпендикулярность плоскостей 124
 - прямых 123
- Пирамида 138
 - усеченная 139
- Планиметрия 121
- Плоскость 124—131
- Плотность распределения 228
- Площадь криволинейной трапеции 198
 - плоской (криволинейной) фигуры 198
 - поверхности вращения 199
 - поверхности призмы 137
- Поверхность вращения 140—144
 - гиперболоид вращения 141
 - параболоид вращения 141
 - цилиндрическая 141
 - эллипсоид вращения 142
- Поверхности второго порядка 132
- Погрешность 40
 - абсолютная 40
 - относительная 40
- Подынтегральная функция 180
- Подынтегральное выражение 180
- Подмножество 14
- Показательное неравенство 91
 - уравнение 91
- Полигон 245
- Полная группа событий 232
- Полуинтервал 46
- Порядок дифференциального уравнения 207
 - производной 153

- Последовательность бесконечно малая 51
 - возрастающая 42
 - ограниченная 44
 - частичных сумм ряда 169
 - числовая 17
- Потенцирование 74
- Правило Крамера решения систем линейных уравнений 118
 - параллелограмма для сложения трех сигм 242
- Предел последовательности 42, 50, 52
 - функции в точке 55
 - левосторонний 44
 - на бесконечности 44
 - правосторонний 44
- Пределы интегрирования 189
- Преобразование линейное 102
 - подобия 104
 - гомотетия 103
 - параллельный перенос 103
 - поворот 103
 - растяжение 103
- Приближенные вычисления 39
 - методы 151, 194
- Призма 137, 201
- Признак Даламбера 171
 - сравнения рядов 153
- Приращение аргумента 61
 - функции 61
- Произведение векторов 109
 - векторное 111
 - скалярное 109
 - смешанное 109
 - декартово (прямое) 15
 - множеств (пересечение) 14
 - событий 232
- Производная 146
- Промежутки 46
- Прообраз элемента 16
- Прямая 123, 126
 - регрессии 251
- Радиианная мера измерения углов 79
- Разложение на множители функции 91
 - в степенной ряд 173
 - в тригонометрический ряд 175
- Размах варьирования 249
- Размер матрицы 113
- Размещение 230

Разрыв функции I рода 64
 — II рода 64
 Распределение случайной величины
 биномиальное 235
 — нормальное 241
 — равномерное 226
 Решение дифференциального уравнения 206—220
 — общее 209
 — особое 209
 — частное 209
 — неравенства 24
 — уравнения 23
 Ряд биномиальный 175
 — вариационный 245
 — гармонический 170
 — расходящийся 169
 — степенной 173
 — сходящийся 169
 — Тейлора 174
 — тригонометрический 175
 — функциональный 172
 — числовой 169
 Секанс 82
 Секущая 146
 Синус угла 83
 Система действительных чисел 41—46
 — комплексных чисел 31, 46—49
 — линейных уравнений 119
 — натуральных чисел 31, 34
 — рациональных чисел 31
 — целых чисел 31
 Система координат 99
 — декартова прямоугольная 100
 — полярная 137
 — цилиндрическая 101
 — счисления 38
 — двоичная 38
 Скачок функции 64
 Скрещивающиеся прямые 125
 Случайные величины 224
 — дискретные 225
 — непрерывные 226
 События достоверные 222
 — невозможные 222
 — независимые 222
 — несовместные 222
 — противоположные 231
 — случайные 224
 Сопряженное к комплексному числу 49

Сочетания 231
 Среднеквадратическое отклонение 240
 Статистическая гипотеза 246, 253
 — альтернативная 253
 — нулевая 253
 Стереометрия 122
 Структура 26
 — алгебраическая 26
 — порядка 27
 — топологическая 27
 Сужение функции 69
 Сумма векторов 108
 — множеств (объединение) 14
 — ряда 169
 — событий 231
 Сфера 142
 Таблица интегралов 181
 — производных 149
 Тангенс 83
 Теорема Вейерштрасса 69
 — Лагранжа 155
 — о среднем 190
 — о существовании и свойствах обратной функции 63
 — существования и единственности решения дифференциального уравнения 210
 — умножения вероятностей 233
 — Ферма 156
 Тетраэдр 140
 Тождество 22
 — основное тригонометрическое 81
 Точка перегиба 160
 Транспонирование матриц 118
 Тригонометрическая форма комплексного числа 48
 Уравнение 21
 — алгебраическое 22
 — трансцендентное 24
 — тригонометрическое 92
 — функциональное 23
 — характеристическое 217
 Уравнения прямой линии (различные виды) 127
 Утверждение истинное 21
 — ложное 21
 Формула Бернулли 235

 — Ньютона—Лейбница 193
 — перехода 74
 — полной вероятности 234
 — прямоугольников 194
 — Тейлора 154, 168
 — трапещий 194
 — Симпсона 194
 — сложения вероятностей 231
 Формулы приведения 81
 Функция 16
 — аналитически заданная 17
 — бесконечно большая 58
 — бесконечно малая 58
 — возрастающая монотонно 63
 — Дирихле 89
 — дифференцируемая 152
 — дробно-рациональная 87
 — интегрируемая 191
 — логарифмическая 74
 — монотонная 63, 64, 68
 — неограниченная 69
 — непрерывная 61, 68
 — сложная 87
 — нескольких переменных 63, 165
 — нечетная 66
 — обратная 19
 — ограниченная 68
 — периодическая 67
 — показательная 72, 91

 — простейшая элементарная 66
 — распределения случайной величины 245
 — степенная 71
 — тригонометрическая 77
 — четная 66
 — числовая 17
 — элементарная 66, 68
 — эмпирическая распределения 245

Цилиндр 141, 198
 Цифры значащие 39

Частная производная 165
 Частота 224
 Число e 55
 — иррациональное 42
 — нечетное 35
 — простое 35
 — четное 35
 Числовая ось 41, 99
 — прямая 46

Шар 142

Экстремум 155, 166
 Эллипс 132

Предисловие.....	4
Студенту: как работать с этой книгой	10
Глава 1. Множества и функции	12
1.1. Понятие множества	12
1.2. Понятие функции	15
1.3. Взаимно-однозначные отображения. Обратная функция	18
1.4. Уравнения, неравенства, тождества	21
*1.5. Понятие о математических структурах	26
Глава 2. Числовые множества	31
2.1. Множество натуральных чисел	31
2.2. Множество целых чисел	35
2.3. Система рациональных чисел	37
2.4. Приближенные вычисления	39
2.5. Система действительных чисел	41
*2.6. Система комплексных чисел	46
Глава 3. Предел и непрерывность	50
3.1. Предел последовательности	50
3.2. Предел функции в точке	55
3.3. Асимптотическое поведение функций	59
3.4. Непрерывные функции и их основные свойства	61
Глава 4. Элементарные функции	66
4.1. Простейшие понятия для классификации функций	66
4.2. Степенная функция	69
4.3. Показательная функция	72
4.4. Логарифмическая функция	74
4.5. Тригонометрические функции	77
4.6. Обратные тригонометрические функции	84
4.7. Класс элементарных функций	87

4.8. Решение уравнений и неравенств, связанных с элементарными функциями	89
Глава 5. Элементы линейной алгебры	98
5.1. Системы координат	98
5.1.1. Понятие о системах координат	99
*5.1.2. Преобразования координат	102
*5.1.3. Построение графиков функций методом преобразования	104
5.2. Векторы	106
5.3. Алгебраический аппарат решения системы линейных уравнений	112
5.3.1. Матрицы	112
5.3.2. Метод Гаусса	114
5.3.3. Определители	116
Глава 6. Элементы аналитической геометрии	120
6.1. Понятие о стереометрии	120
6.2. Прямые и плоскости в аналитической геометрии	126
6.3. Кривые второго порядка	131
6.4. Стереометрические фигуры в аналитической геометрии	136
6.4.1. Многогранники	136
6.4.2. Тела вращения	140
Глава 7. Производная и ее приложения	145
7.1. Определение производной функции, ее смысл	145
7.2. Вычисление производных	147
7.3. Дифференциал. Приближение функции многочленом	151
7.4. Исследование функций методами дифференциального исчисления	155
7.4.1. Исследование функций на экстремум	155
7.4.2. Исследование функции на монотонность	158
7.4.3. Исследование функции на выпуклость и вогнутость графика	159
7.4.4. Комплексная схема исследования функции	161
*7.5. Понятие о дифференцировании функций нескольких переменных	165
*7.6. Представление функций рядами	168
7.6.1. Постановка задачи	168
7.6.2. Числовые ряды	168

7.6.3. Функциональные ряды	172
7.6.4. Примеры использования рядов в вычислениях	176
Глава 8. Интеграл и его приложения	179
8.1. Неопределенный интеграл	179
8.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл	179
8.1.2. Простейшие приемы вычисления неопределенных интегралов	181
8.1.3. О вычислимости интегралов в классе элементарных функций	183
8.2. Определенный интеграл	186
8.2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла	186
8.2.2. Понятие определенного интеграла и его свойства	188
8.2.3. Формула Ньютона — Лейбница. Вычисление определенных интегралов	191
8.3. Приложения определенных интегралов	195
8.3.1. Вычисление площадей фигур	195
8.3.2. Вычисление объемов	200
8.3.3. Другие применения определенных интегралов	203
Глава 9. Дифференциальные уравнения	206
9.1. Понятие о дифференциальном уравнении	206
9.2. Простейшие уравнения первого порядка	210
9.3. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка	215
Глава 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики	221
10.1. Понятие вероятности случайных событий. Случайные величины	221
10.1.1. Аксиоматическое определение вероятности	222
10.1.2. Классическое определение вероятности	223
10.1.3. Случайные величины	225
10.2. Простейшие теоремы о вероятностях случайных событий	230
10.2.1. Формулы комбинаторики	230
10.2.2. Формулы сложения, умножения и полной вероятности	231
10.2.3. Формула Бернулли	234
10.3. Простейшие характеристики законов распределения	236
10.3.1. Математическое ожидание случайной величины	236

10.3.2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины.....	238
10.3.3. Нормальный закон распределения и его параметры.....	241
10.4. Простейшие понятия математической статистики	243
10.4.1. Понятие о выборочном методе	243
*10.4.2. Понятие о корреляциях и регрессиях.....	249
*10.4.3. Понятие о проверке статистических гипотез	253
Задачи и упражнения	256
Задания к главе 1. Множества и функции.....	256
Задания к главе 2. Числовые множества	259
Задания к главе 3. Предел и непрерывность.....	262
Задания к главе 4. Элементарные функции.....	266
Задания к главе 5. Элементы линейной алгебры	270
Задания к главе 6. Элементы аналитической геометрии	273
Задания к главе 7. Производная и ее приложения	277
Задания к главе 8. Интеграл и его приложения.....	282
Задания к главе 9. Дифференциальные уравнения.....	286
Задания к главе 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики	289
Ответы и рекомендации к решению задач.....	296
Предметный указатель.....	305